涂镀层力学和圆柱薄壳外涂层的阻尼特性*

MECHANICS OF COATS FROM PAINTING AND PLATING AND DAMPING PROPERTIES IN CYLINDRICAL SHELLS WITH OUTER COATS

张培源　　　赵保敏
Zhang Peiyuan　　Zhao Baomin
（重庆大学工程力学系）

摘　要　提出了涂镀层的力学模型并建立了一般理论和分析方法；得到了对于波动内压作用的涂层圆柱薄壳的阻尼特性、涂层应力和涂层与壳体结合应力的解。

关键词　涂镀层；应力；涂层结合应力

中国图书资料分类法分类号　TB124；TB333

ABSTRACT　A mechanical model of coats is proposed to approach general theory and method in analysing it, and damping properies, stresses in coats and stresses between coats and body in a cylindrical shell with outer coats are given too.

KEY WORDS　coat from painting and plating; stress; strsses between coats and body

0　引　言

涂镀层不仅赋予制品良好的观感，而且还带来一系列特殊性质，如导电性、热交换性、阻尼性、耐磨性等。这些特殊性质都须以涂镀层和本体的良好结合为前提条件。因此，研究涂镀层的应力、应变和它与本体的结合力是涂镀层应用的基础。时至今日，这类研究工作仅限于简单模型的特定工作情况[1,2,3]，没有形成系统的理论和方法。

涂镀层和本体组成一个多相物体，其每相都是宏观连续介质。连续介质力学的原理和分析方法已经成熟。这样，利用涂镀层的几何特点，建立适当的力学模型，应用连续介质力学的原理和方法分析涂镀层的条件已经成熟。

本文旨在建立涂镀层力学的一般理论和分析方法，针对涂镀层厚度极薄的几何特点，引入研究涂镀层应力、变形及其涂层结合应力的模型，导出控制方程、探寻求解方法。对于带涂层的圆柱壳轴对称问题，本文给出了分析解。

1　涂镀层模型

涂镀层和本体组成多相物体，按照连续介质力学的方法，只要已知各相的本构关系和相

* 收文日期1990-04-24

间结合条件,总可以得到这一多相物体在特定外加作用下的应力场、位移场等各类响应。但是,针对涂镀层厚度远小于本体特征尺寸的特点,我们可以引入以下假设:

1) 涂镀层很薄,可以忽略应力沿厚度的变化,即把这一薄层作为薄膜来处理。

2) 涂镀层通过结合面 S 施予本体的面力 $P_k(k=1,2,3)$ 构成本体的应力边值条件。

$$S:\quad \sigma_{kl}n_l = P_k(\sigma_{kl}\text{ 为本体的应力张量})\tag{1}$$

3) 涂镀层和本体在结合面 S 上满足位移连续条件

$$S:\quad U_k^* = U_k\tag{2}$$

4) 只计入涂镀层薄膜面内的应变分量,它们在膜厚度上均匀分布,且通过 Cauchy 方程与膜位移相联系。忽略其余的应变分量。

5) 涂镀层薄膜面内应变 ε_{kl}^* 与膜内力 T_{kl}^* 满足涂镀层本构方程:

$$T_{kl}^*(t) = L_{kl}(\underset{\sim}{\varepsilon}^*(\tau), \infty < \tau < t)\tag{3}$$

6) 涂镀层中膜内力 T_{kl}^* 与本体施予其上的面力 $(-P_k)$ 满足膜平衡条件。

以上各式中,n_l 为结合面上本体的外法线单位矢量;L_{kl} 表示以 $\varepsilon_{kl}^*(\tau)$ 为自变函数的泛函;τ 和 t 分别为历史时刻和即时时刻。右上角带 * 和不带 * 分别表示涂镀层膜和本体的相应物理量。

从数学上看,这些假设形成的涂镀层模型相当于建立了本体的特殊边值条件。这些边值条件和本体上的控制方程一起组成本体所占区域中偏微分方程组的边值问题。一般而言,总可以通过对这一边值问题的求解得到涂镀层膜中的内力、膜与本体的结合应力和其他响应的分析解或数值解。

例如内外半径分别为 a 和 b 的 Hoode 介质圆筒在轴向正应变 ε、内压 q 和外压 p 共同作用下产生的位移和应力的非零分量为

$$U_r(r) = \frac{b}{G(1-a^2/b^2)}\left[q(1-v)\frac{a^2}{b^2} - \frac{p}{2}\left(1-2v+\frac{a^2}{b^2}\right)\right] - v\varepsilon b$$

$$\sigma_r(r) = -\left[q\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{b^2}{r^2}-1\right) + p\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\right]\Big/\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)$$

$$\sigma_\theta(r) = \left[q\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{b^2}{r^2}+1\right) - p\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\right]\Big/\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)$$

$$\sigma_z(r) = 2v(q-p)\Big/\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right) + E\varepsilon$$

如果外表面 $(r=b)$ 施以镀层,那末式中 p 便为本体控制方程求积分得到的积分常数,是表示镀层通过外表面 $(r=b)$ 施予本体的压力。这些式中 G、v 分别表示本体介质的剪切模量和 *Poisson* 比。

按假设 3 和 4,镀层的位移和应变分别为

$$U_r^* = U_r(b),\qquad \varepsilon_\theta^* = U_r^*/b,\qquad \varepsilon_z^* = \varepsilon$$

如果镀层为线弹性介质,薄膜内力分别为 T_θ^* 和 T_z^*,那末假设 5 和 6 成为

$$T_\theta^* = C_{11}^*\varepsilon_\theta^* + C_{12}^*\varepsilon_z,\qquad T_z^* = C_{21}^*\varepsilon_\theta^* + C_{22}^*\varepsilon_z^*$$

$$T_\theta^* = pb$$

这里 C_{11}^*、$C_{12}^*(=C_{21}^*)$ 和 C_{22}^* 是镀层物理性质参数,也与镀层厚度有关。这些方程综合起来得到

$$-pb + C_{11}^{*}\{[q(1-v)\frac{a^2}{b^2} - \frac{p}{2}(1-2v+\frac{a^2}{b^2})]/[G(1-\frac{a^2}{b^2})] - v\varepsilon\} + C_{12}^{*}\varepsilon = 0$$

这相当于本体圆筒在 $r=b$ 的特殊边界条件，其解给出了镀层对本体的压力 p

$$p = \left[\frac{C_{11}}{G}\frac{(1-v)a^2/b^2}{(1-a^2/b^2)}q - (C_{11}v - C_{12})\varepsilon\right] \Big/ \left[1 + \frac{C_{11}(1-2v+a^2/b^2)}{2G(1-a^2/b^2)}\right]$$

2　涂镀层圆柱薄壳的轴对称变形

以上假设不妨碍在本体分析中采用近似理论，例如，对于薄壁本体采用薄板理论或薄壳理论。

讨论圆柱薄壳在轴对称内压 $q(x,t)$ 作用下的轴对称变形，壳体外部存在厚为 δ^* 的均匀涂层。设圆柱壳本体是 Hoode 介质，取 x 为壳中面母线方向的坐标，根据经典薄壳理论，本体的控制方程有

$$\text{几何方程}\quad \left.\begin{aligned} &\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_2 = \frac{w}{a} \\ &k_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\text{平衡方程}\quad \left.\begin{aligned} &\frac{\partial T_1}{\partial x} + q_1 + q_1^* = 0 \\ &\frac{\partial N_1}{\partial u} - \frac{T_2}{a} + q_n + q_n^* = 0\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x} - N_1 + m_1^* = 0 \tag{6}$$

$$\text{本构方程}\quad \left.\begin{aligned} &T_1 = C(\varepsilon_1 + v\varepsilon_2) \quad T_2 = C(\varepsilon_2 + v\varepsilon_1) \\ &M_1 = Dk_1 \quad M_2 = vM_1\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

式中 ε_1、ε_2 和 k_1、k_2 分别为轴向和周向正应变与此两方向的曲率改变；与之相应的中面内力和内力矩分别是 T_1、T_2、M_1 和 M_2；q_1^* 和 m^* 分别为涂层施予本体圆筒外表面力向中面简化得到的轴向分布力和分布力矩，且

$$m_1^* = q_1^*\delta/2 \tag{8}$$

此外 $C = E\delta/(1-v^2)$，$D = E\delta^3/[12(1-v^2)]$，$E$ 和 v 分别为本体材料的杨氏模量和 Poisson 比；

设涂层位移的轴向和周向分量分别为 U^* 和 w^*，那末相应的应变、内力和本体施予其上的面力满足方程

$$\varepsilon_1^* = \frac{\partial u^*}{\partial x}, \qquad \varepsilon_2^* = w^*/(a+\delta/2) \tag{9}$$

$$\frac{\partial T_1^*}{\partial x} - q_1^* = 0, \qquad \frac{T_2^*}{a+\delta/2} + q_n^* = 0 \tag{10}$$

如果涂层具有线性粘弹性本构关系，其本构方程用 T_1^* T_2^* ε_1^* 和 ε_2^* 的 Laplace 变换 $\bar{T}_1^*$ $\bar{T}_2^*$ $\bar{\varepsilon}_1^*$ 和

$\bar{\varepsilon}_2^*$ 表示为

$$\bar{T}_1^* = \bar{C}^*(\bar{\varepsilon}_1^* + \bar{\nu}^*\bar{\varepsilon}_2^*) \qquad \bar{T}_2^* = \bar{C}^*(\bar{\varepsilon}_2^* + \bar{\nu}^*\bar{\varepsilon}_1^*) \tag{11}$$

式中 $\bar{C}^*$ 和 $\bar{\nu}^*$ 都是与物理性质有关的、变换变量 S 的函数。$\bar{C}^*$ 还与涂层厚度 δ^* 有关。这里

$$\bar{T}^* = \bar{T}^*(x,s) \overset{\text{def}}{=} \int_0^\infty T_1^*(x,t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

按照假设3,

$$u^* = u - \frac{\delta}{2}\frac{\partial w}{\partial x}, \quad w^* = w \tag{12}$$

把式(9)和(10)两端分别作 Laplace 变换，利用式(11)，得到

$$\bar{q}_1^* = \bar{C}^*\left(\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2} - \frac{\delta}{2}\frac{\partial^3\bar{w}}{\partial x^3} + \bar{\nu}^*\frac{1}{a}\frac{\partial\bar{w}}{\partial x}\right)$$

$$\bar{q}_*^* = -\bar{C}^*\left[\frac{1}{a^2}\bar{w} + \frac{\bar{\nu}^*}{a}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} - \frac{\delta}{2}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial x^2}\right)\right]$$

$$\bar{m}^* = \bar{q}_1^*\delta/2$$

这里公式与圆柱壳本体的的控制方程(4)、(5)、(6)或(7)的 Laplace 变换式结合起来，可以组成本体中面位移 Laplace 变换的方程式 .

$$(C + \bar{C}^*)\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2} + (C\nu + \bar{C}^*\bar{\nu}^*)\frac{1}{a}\frac{\partial\bar{w}}{\partial x} - \frac{\delta C^*}{2}\frac{\partial^3\bar{w}}{\partial x^3} + \bar{q}_1 = 0$$

$$-\left(D + \frac{\delta^2\bar{C}^*}{4}\right)\frac{\partial^4\bar{w}}{\partial x^4} + \frac{\delta}{a}\bar{C}^*\bar{\nu}^*\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial x^2} - \frac{C + \bar{C}^*}{a^2}\bar{w} - (C\nu + \bar{C}^*\nu^*)\frac{1}{a}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + \frac{C^*\delta}{2}\cdot\frac{\partial^3\bar{u}}{\partial x^3} + \bar{q}_* = 0$$

由这两个方程消去 $\bar{u}$，得到

$$\left[D + \frac{\delta^2\bar{C}^*}{4}\left(1 - \frac{\bar{C}^*}{C + \bar{C}^*}\right)\right]\frac{\partial^4\bar{w}}{\partial x^4} - \frac{\bar{C}^*\delta\bar{\nu}^*}{a}\left(1 - \frac{1}{\bar{\nu}^*}\frac{C\nu + \bar{C}^*\bar{\nu}^*}{C + \bar{C}^*}\right)\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial x^2}$$
$$+ \frac{C + C^*}{a^2}\left[1 - \left(\frac{C\nu + \bar{C}^*\bar{\nu}^*}{C + \bar{C}^*}\right)^2\right]\bar{w}$$
$$= \bar{q}_* + \frac{C\nu + \bar{C}^*\bar{\nu}^*}{C + \bar{C}^*}\cdot\frac{1}{a}\left[\int_0^x \bar{q}_1\mathrm{d}x - \bar{T}_0\right] - \frac{\delta}{2}\frac{\bar{C}^*}{C + \bar{C}^*}\frac{\partial\bar{q}_1}{\partial x} \tag{13}$$

常量 $\bar{T}_0$ 表示 $x = 0$ 处轴向内力 T_1 的 Laplace 变换。

在惯性力不可忽略的情况下，对于零初始条件：

$$t = 0: \quad w = u = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

方程(13)中 $\bar{q}_*$ 和 $\bar{q}_1$ 须用 $\bar{q}_* - \gamma s^2\bar{w}$ 和 $\bar{q}_1 - \gamma s^2\bar{u}$ 代替。这里 γ 为中面单位面积相应的壳元素质量。

方程(13)的几何边界条件与本体圆柱薄壳的几何边界条件相同。对于 $x = 0$ 处嵌固支承的情况，则有边界条件

$$\left.\begin{aligned} x = 0: \quad w = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \bar{w} = 0 \quad \frac{\partial\bar{w}}{\partial x} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

3　涂层圆柱薄壳在波动内压下的振动

在方程(13)中取 $\bar{T}_0 = 0, \bar{q}_1 = 0$，当

$$|1 + \bar{C}^*/C| \approx 1, |1 + \bar{C}^*\bar{v}^*/(Cv)| \approx 1$$

我们得到

$$\frac{\partial^4\overline{w}}{\partial x^4} - 8\beta^2\xi\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial x^2} + 4\beta^4\varphi^4\overline{w} = \bar{q}_s/D \tag{16}$$

此方程有解

$$\overline{w}(xs) = A_1e^{-p\beta x}\cos\beta x + A_2e^{-p\beta x}\sin q\beta x + A_3e^{p\beta x}\cos\beta x + A_4e^{p\beta x}\sin q\beta x + \overline{w}_c(xs) \tag{17}$$

式中 $\overline{w}_c(xs)$ 为方程(16)的一个特解，

$$p = \sqrt{\varphi^2 + 2\xi},\quad q = \sqrt{\varphi^2 - 2\xi}$$

$$\beta^4 = \frac{3(1-v^2)}{a^2\delta^2}, \varphi^4 = 1 + \frac{\gamma s^2a^2}{E\delta}, \xi = \frac{\sqrt{3}\,\bar{v}^*\bar{C}^*}{2\sqrt{1-v^2}c}$$

$A_1A_2A_3$ 和 A_4 为积分常数，它们与 S 有关。

如果内压 q_s 具有波动性，波幅、波速和波长分别为 q_m、v_0 和 L，那末

$$q_s = q_m\sin\lambda(x - v_0t),\quad \lambda = 2\pi/L$$

且

$$\bar{q}_s = \frac{q_m}{s^2 + \lambda^2v_0^2}(s\sin\lambda x - v_0\lambda\cos\lambda x)$$

因此

$$\overline{w}_c(xs) = \bar{q}_s/[D(\lambda^4 + 4\beta^2\lambda^2\xi + 4\beta^4\varphi^4)] \tag{18}$$

对于端部嵌固的半无限长圆柱壳，利用边界条件(15)，可以决定常量 A_1、A_2、A_3 和 A_4，其解可以表示为

$$\overline{w}(x,s) = q_m\frac{s\sin\lambda x - v_0\lambda\cos\lambda x + e^{-p\beta x}\left[v_0\lambda\cos q\beta x + \left(\frac{v_0\lambda p}{q} - \frac{\lambda s}{q\beta}\right)\sin q\beta x\right]}{D(\lambda^4 + 4\beta^2\xi\lambda^2 + 4\beta^4\varphi^4)(s^2 + \lambda^2v_0^2)} \tag{19}$$

特例，如果不计圆柱壳端部支承条件的影响，即只讨论特解(18)，当忽略惯性影响($\varphi=1$)时，对于涂层特性为

$$\xi = \xi_0 + \xi_1 s \qquad (\xi_0、\xi_1 \text{ 为实参量}) \tag{20}$$

的情况；我们可以得到解

$$w(xt) = w_a\{\sin\lambda(x - v_0t) + \lambda v_0T\cos\lambda(x - v_0t) - e^{-t/T}[\sin\lambda x + \lambda v_0T\cos\lambda x]\} \tag{21}$$

式中

$$T = 4\beta^2\lambda^2\xi_1/(\lambda^4 + 4\beta^4 + 4\beta^2\lambda^2\xi_0), w_a = q_m/\{D(\lambda^4 + 4\beta^4 + 4\beta^2\lambda^2\xi_0)[1 + (\lambda v_0T)^2]\} \tag{22}$$

对于稳态的振动，式(21)右端方括号的项不再存在。这时，载荷于一个周期上作的功，在单位中面积上为

$$\int_0^{2\pi/\lambda v_0} q_s(x,t)\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}dt = w_aq_m\pi\lambda v_0T$$

与假设(20)相应，我们取

$$\bar{v}^* = \text{const}, \bar{C}^* = c_1 s + c_0 \qquad (\bar{v}^*、c_1、c_0 \text{均为实参量}) \tag{23}$$

那末由式(5)(6)和(7)得到

$$T_1^* = -\left(c_0 + c_1 \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\delta}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\bar{v}^*}{a} w\right)$$

$$q_1^* = \frac{\partial}{\partial x} T_1^* \qquad q_n^* = -\frac{v^*}{a} T_1^* - (1 - v^{*2})\frac{1}{a^2}\left(c_0 + c_1 \frac{\partial}{\partial x}\right) w$$

在稳态的振动下，由此得到涂层张力和涂层与本体的相互作用力

$$T_1^* = \frac{w_m^*}{a}\left(\frac{\delta a \lambda^2}{2} + \bar{v}^*\right)\left[\lambda v_0 T\left(c_0 + \frac{c_1}{T}\right)\cos\lambda(x - v_0 t) + (c_0 - c_1 \lambda^2 v_0^2 T)\sin\lambda(x - v_0 t)\right]$$

$$q_1^* = \frac{w_m}{a}\lambda\left(\frac{\delta a \lambda^2}{2} + \bar{v}^*\right)\left[-\lambda v_0 T\left(c_0 + \frac{c_1}{T}\right)\sin\lambda(x - v_0 t) + (c_0 - c_1 \lambda^2 v_0^2 T)\cos\lambda(x - v_0 t)\right]$$

$$q_n^* = -\frac{w_m}{a^2}\left\{\left[c_0\left(\frac{\delta a \lambda^2}{2}\bar{v}^* + 1\right) + c_1\left(\frac{\delta a \lambda^2}{2}\bar{v}^* + 2\bar{v}^{*2} - 1\right)\right]\lambda v_0 T\cos\lambda(x - v_0 t)\right.$$
$$\left. + \left[c_0\left(\frac{\delta a \lambda^2}{2}\bar{v}^* + 1\right) - c_1\left(\frac{\delta a \lambda^2}{2}\bar{v}^* + 2\bar{v}^{*2} - 1\right)\lambda^2 v_0^2 T\right]\sin\lambda(x - v_0 t)\right\}$$

$\bar{v}^*$ 为常实值相应于文[4]的假设。式(23)后一等式则表示涂层可用双参数 Voigt 模型描写应力应变关系。

感谢支持和帮助本工作的杨绪灿同志。

参 考 文 献

1 唐可珂. 阻尼涂料. 涂料工业, 1986, 1

2 尹玉玲, 姚树人. 阻尼涂料及其进展. 涂料工业, 1986, 4

3 刘景光, 徐非, 林大伟, 姜太秀. 一种新型 GS—A 隔声阻尼材料. 噪声和振动控制, 1988, 2(1)

4 Schaprey, M. R., Intern. J. Fractures, 1975, 11, 141～159