

柱形弹体撞击时塑性变形的 G. I. 泰勒理论冲量再修正

THE REIMPROVEMENT FOR IMPULSE OF G. I. TAYLOR THEORY OF PLASTIC DEFORMATION IN IMPACT OF CYLINDRICAL PROJECTILES

刘相臣 李则强
Liu Xiangchen Li Zeqiang
(重庆大学工程力学系)

摘 要 本文对柱形弹体撞击时塑性变形的 G. I. 泰勒理论进行了再修正,再修正冲量是泰勒冲量的 $1/2$,是泰勒修正冲量的 $3/4$,得到了与实验值更为接近的理论解。

关键词 G. I. 泰勒理论; 冲量; 塑性变形; 柱形弹体

中国图书资料分类法分类号 O344.1

ABSTRACT In this paper the reimprovement for G. I. Taylor theory of plastic deformation in impact of cylindrical projectiles is done. The impulse in the reimproved theory is G. I. Taylor's $1/2$, and $3/4$ of G. I. Taylor's improved theory. The analytical solution of the reimproved theory shows that it gives better agreement with experimental results than those of the original Taylor's theory and the improved theory.

KEY WORDS G. I. Taylor theory; impulse; plastic deformation; cylindrical projectiles

0 引 言

柱形弹体对刚性靶板的纵向撞击塑性变形理论,是 G. I. 泰勒首先提出的^[1],这个理论的重要性在于通过它可以从实验数据计算材料的动力屈服强度,以及实验结果^[2]中看到,动力屈服强度与撞击速度没有直接关系,且动屈服强度高于静力屈服强度,这样就为弹体撞击研究提供了一个重要依据。但是,泰勒理论由于微分方程的复杂性和求解的不便,文献^[3]给出了全部解析解,且对冲量进行了修正,其结果较泰勒理论符合试验值。本文提出了一个新的假设,对泰勒理论的冲量进行了再修正,从而获得了与实验值更接近的理论解。

1 G. I. 泰勒理论及其修正

G. I. 泰勒假定弹体材料是理想塑性的,靶体是完全刚性的,把整个撞击的过程看成是

* 收文日期 1990-12-07

一个连续模型(图1),其中 U 为塑性区自由端延伸的速度(即弹塑性交界面向左传播的速度), V 为无应力区向前运动的速度, h 为塑性区纵向长度, x 为弹性物体长度, ρ_s 为弹性物体的材料密度, A, A_0 为横截面积, σ_s^0 为材料的屈服应力,上述各量的关系为:

$$\frac{dh}{dt} = U \quad (1)$$

$$\frac{dx}{dt} = -(U + V) \quad (2)$$

$$\frac{dV}{dt} = -\sigma_s^0/x \cdot \rho_s \quad (3)$$

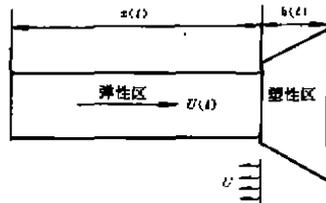


图1 泰勒撞击连续模型

由于 h, U, V, x 均是时间 t 的函数,且不能由上述三个方程得到,泰勒从动力分析和变形连续的关系,建立了补充方程:

$$A_0(U + V) = AU \quad (4)$$

$$\rho_s A_0(U + V)V = \sigma_s^0(A - A_0) \quad (5)$$

以上五个方程中含有五个待定量,即 $U(t), V(t), x(t), h(t), A(t)$,在一定的起止条件是可以求解的,如:

当 $t = 0$ 时, $V = V_0, x = L, h = 0, A = A_1$;

$t = t_2$ 时, $V = 0, x = L_2, U = 0, h = h_2, A = A_0$

其中 A_1, L_2, h_2 是待定量。

以上就是泰勒的理论成果。若干年后[3]给出了泰勒理论的全部分析解,并得到:

$$\frac{h_2}{L} = \frac{1}{2} e^{-R/2} \int_1^{A_1/A_0} (\xi^{-1/2} + \xi^{-3/2}) e^{\xi/2} d\xi \quad (6)$$

$$\ln \frac{L_2}{L} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{A_1}{A_0} - \ln \frac{A_1}{A_0} \right] \quad (7)$$

其中: $R = \frac{A_1}{A_0} + \ln \frac{A_1}{A_0}, \frac{A_1}{A_0} = 1 + \lambda + \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda}, \lambda = \frac{\rho_s V_0^2}{2\sigma_s^0}$

由于泰勒忽视了塑性材料横向运动惯性作用的影响,忽视了靶体在撞击中变形的能量消耗,也忽视了弹体塑性强化过程,因而导致他的理论中的 h_2/L 值与实验值相差较多。对泰勒理论的修改者[3]假设接触面 S 是一个等减速的扩张过程, δ 的一段时间开始时,面积扩展速度为 w_0 ,结束时为零。而其它任意时刻 t 时,扩展速度 $\frac{ds}{dt}$ 为:

$$\frac{ds}{dt} = w_0 \left(1 - \frac{t}{\delta} \right) \quad 0 \leq t \leq \delta \quad (8)$$

由式(8)并根据起始条件($t = 0$ 时, $S = A_0$)和终止条件($t = \delta$ 时 $S = A$),可求得 δ 时段内各个时刻 t 时接触面积为:

$$S = (A - A_0) \left(2t - \frac{t^2}{\delta} \right) + A_0$$

所以,压缩应力 σ_s^0 的合力增加部分在 δt 中的冲量 I 应该是:

$$I = \int_0^{\delta} \sigma_s^0 (S - A_0) dt = \int_0^{\delta} (A - A_0) \left(2t - \frac{t^2}{\delta} \right) \sigma_s^0 dt$$

$$\begin{aligned}
 &= (A - A_0) \sigma_p^0 \int_0^{\Delta t} \left(2t - \frac{t^2}{\Delta t} \right) dt \\
 &= \frac{2}{3} \sigma_p^0 (A - A_0) \Delta t
 \end{aligned} \tag{9}$$

于是,由动量定律,式(5)应修正为

$$\rho_p A_0 (U + V) V = \frac{2}{3} \sigma_p^0 (A - A_0) \Delta t \tag{10}$$

式(1)、(2)、(3)、(4)、(5)组成了泰勒理论的修正方程组,相应的在相同的起止条件下,可得到新的分析解,且:

$$\left(\frac{L_2}{L} \right) = \frac{1}{3} e^{-R_1/3} \int_1^{A_1/A_0} (\xi^{-2/3} + \xi^{-5/3}) e^{\xi/3} d\xi \tag{11}$$

$$\ln \left(\frac{L_2}{L} \right) = \frac{1}{3} \left[1 - \left(\frac{A_1}{A_0} \right) - \ln \left(\frac{A_1}{A_0} \right) \right] \tag{12}$$

$$\text{这里, } R_1 = \frac{A_1}{A_0} + \ln \frac{A_1}{A_0}, \frac{A_1}{A_0} = 1 + \frac{3}{2} \lambda + \sqrt{3\lambda + 9\lambda^2/4}$$

2 G. I. 泰勒理论的冲量的再修正

由于整个撞击过程是在 Δt 时段内完成的 ($0 \leq t \leq \Delta t$), 对于接触面的扩展过程并不确定. 但当 $t = 0$ 时, 即当弹体刚接触到刚性靶体的时刻, 接触面的扩展速度显然是零; 而当整个撞击过程结束时, 接触面的扩展过程也告结束, 即当 $t = \Delta t$ 时, 其扩展速度也应为零. 因此, 笔者将接触面的扩展分为两个阶段: 即在 $[0, \Delta t]$ 内的前一时段 $0 \leq t \leq t_1$ ($t_1 < \Delta t$) 内接触面的扩展速度是等加速的, 而在后一时段 $t_1 < t \leq \Delta t$ 内接触面的扩展速度是等减速的. 从而 $[0, \Delta t]$ 内任意时刻 t 的扩展速度为:

$$\frac{ds}{dt} = at(\Delta t - t) \tag{13}$$

式中 a 是待定常数, 积分(13)得:

$$s = \int_0^t \frac{ds}{dt} dt = a \left(\frac{\Delta t}{2} t^2 - \frac{1}{3} t^3 \right) + C$$

由起始条件 ($t = 0, s = A_0$) 和终止条件 ($t = \Delta t, s = A$) 可求得:

$$C = A_0, a = 6(A - A_0) / \Delta t^3$$

从而 Δt 时段内任意时刻 t 时的接触面积为:

$$s = \frac{6}{\Delta t^3} (A - A_0) \left(\frac{\Delta t}{2} t^2 - \frac{1}{3} t^3 \right) + A_0 \tag{14}$$

故 Δt 时段内的压缩应力 σ_p^0 的合力增加部分的冲量 I 应该是:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\Delta t} (s - A_0) \sigma_p^0 dt = \frac{6(A - A_0)}{\Delta t^3} \int_0^{\Delta t} \left(\frac{\Delta t}{2} t^2 - \frac{1}{3} t^3 \right) dt \\
 &= \frac{1}{2} \sigma_p^0 (A - A_0) \Delta t
 \end{aligned} \tag{15}$$

于是由式(5)可再修正为:

$$\rho_p A_0 (U + V) V = \frac{1}{2} \sigma_p^0 (A - A_0) \Delta t \tag{16}$$

式(1)、(2)、(3)、(4)、(10)组成了笔者对泰勒理论的再修正的方程组。在相同的起止条件下用此方程组可得其分析解,过程如下:

$$\text{由式(4)} \quad \text{有 } U = A_0 V / (A - A_0) \quad (17)$$

将式(17)代入(10)得

$$\rho_2 \cdot A_0 \cdot \frac{A_0}{A - A_0} V^2 = \frac{1}{2} \sigma_p^2 (A - A_0)$$

$$\text{即} \quad \frac{\rho_2 V^2}{\sigma_p^2} = \frac{(A - A_0)^2}{2A_0 A} = \frac{1}{2} \left(\frac{A}{A_0} + \frac{A_0}{A} - 2 \right) \quad (18)$$

引入初始条件: $V = V_0$ 时, $A = A_1$, 于是式(18)化为:

$$\frac{\rho_2 V_0^2}{\sigma_p^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{A_1}{A_0} + \frac{A_0}{A_1} - 2 \right) \quad (19)$$

解出 $\frac{A_1}{A_0}$ 得:

$$\frac{A_1}{A_0} = 2\lambda + 1 + 2\sqrt{\lambda^2 + \lambda} \quad (20)$$

式中

$$\lambda = \rho_2 V_0^2 / 2\sigma_p^2 \quad (21)$$

λ 是一个已知的无量纲的量。式(20)根号前取正号是因为 $\frac{A_1}{A_0} > 1$, 由式(2)、(3)中消去 dV 得:

$$\frac{dx}{dV} = \frac{(U + V)x\rho_2}{\sigma_p^2} = \frac{\rho_2}{\sigma_p^2} \frac{A}{A - A_0} V x \quad (22)$$

消去 $\frac{\rho_2 V^2}{\sigma_p^2}$, 可得 x 和 A 的关系的微分方程

$$4 \frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{A_0} + \frac{1}{A} \right) dA \quad (23)$$

$$\text{积分, 得:} \quad \ln x^4 = \frac{A}{A_0} + \ln \frac{A}{A_0} + C_1 \quad (24)$$

利用起始条件 ($x = L, A = A_1$) 和终止条件 ($x = L_2, A = A_0$) 可以分别求得:

$$\ln L^4 = \frac{A_1}{A_0} + \ln \frac{A_1}{A_0} + C_1 \quad (25)$$

$$\ln L_2^4 = 1 + C_1 \quad (26)$$

$$\text{消去 } C_1 \text{ 得:} \quad \ln \left(\frac{x}{L} \right)^4 = \frac{A - A_1}{A_0} + \ln \frac{A}{A_1} \quad (27)$$

$$\ln \left(\frac{L_2}{L} \right)^4 = 1 - \frac{A_1}{A_0} - \ln \frac{A_1}{A_0} \quad (28)$$

将式(20)中的 $\frac{A_1}{A_0}$ 代入式(28), 即可求得待定的最终未变形部分的长度 L_2 , 而

$$\ln \left(\frac{L_2}{L} \right) = \frac{1}{4} [1 - (2\lambda + 1 + 2\sqrt{\lambda^2 + \lambda}) - \ln(2\lambda + 1 + 2\sqrt{\lambda^2 + \lambda})] \quad (29)$$

$$\ln \left(\frac{x}{L} \right) = \frac{1}{4} \left[\frac{A}{A_0} + \ln \frac{A}{A_0} - (2\lambda + 1 + 2\sqrt{\lambda^2 + \lambda}) - \ln(2\lambda + 1 + 2\sqrt{\lambda^2 + \lambda}) \right] \quad (30)$$

式(29)、式(30)是 $\frac{\xi}{L}$ 和 $\frac{A}{A_0}$ 的关系式。

现在,求解弹体变形后的形状。式(1)、(2)中消去 dt ,得:

$$\frac{dh}{dx} = -\frac{u}{u+v} = -\frac{A_0}{A}$$

积分得:
$$h = -\int_L^x \frac{A_0}{A} dx \quad (31)$$

从(30)微分给出:

$$dx = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{A_0}{A} \right) \sqrt{\frac{A}{A_0}} e^{\frac{1}{4} \frac{A}{A_0}} e^{-\frac{1}{4} R} d\left(\frac{A}{A_0}\right) \quad (32)$$

式中
$$R = 2\lambda + 1 + 2\sqrt{\lambda^2 + \lambda} + \ln(2\lambda + 1 + 2\sqrt{\lambda^2 + \lambda}) \quad (33)$$

将(32)代入(31)得:

$$\begin{aligned} h &= \frac{L}{4} e^{-\frac{R}{4}} \int_{A/A_0}^{A_1/A_0} \xi^{-7/4} (1 + \xi) e^{\xi/4} d\xi \\ &= \frac{L}{4} e^{-R/4} [\Gamma_{(A_1/A_0)} - \Gamma_{(A/A_0)}] \end{aligned} \quad (34)$$

这里
$$\Gamma_{(\xi)} = \int_1^{\xi} \tau^{-7/4} (1 + \tau) e^{\tau/4} d\tau \quad (35)$$

在终止时, $A = A_0, h = h_2$ 而 $\Gamma_{(1)} = 0$, 所以

$$h_2 = \frac{L}{4} e^{-R/4} \Gamma_{(A_1/A_0)} \quad (36)$$

h 和 h_2 相减得:

$$h = h_2 - \frac{L}{4} e^{-R/4} \Gamma_{(A/A_0)} \quad (37)$$

式(37)为柱形弹体在撞击后的形状表达式。 A_1/A_0 是根据式(20)由 λ 值决定的,所以最大长度 h_2 也是由 λ 决定的。

下面将求出 t 和 A/A_0 的关系。由式(3)、(22)中消去 dt ,得到 dt 和 dx 的关系是:

$$dt = -\frac{A - A_0}{Av} dx \quad (38)$$

把式(32)中的 dx 和式(18)中的 V 的表达式代入式(38),整理后给出:

$$dt = -\frac{L\sqrt{\lambda}}{2V_0} \left(1 + \frac{A_0}{A} \right) \left(\frac{A}{A_0} \right)^{-1/4} e^{\frac{1}{4} \left(\frac{A}{A_0} - R \right)} d\left(\frac{A}{A_0}\right) \quad (39)$$

积分上式,并用 $t = 0$ 时, $A = A_1$ 的起始条件,可求得 t 和 A/A_0 的关系式:

$$t = \frac{L\sqrt{\lambda}}{2V_0} e^{-R/4} \left[A\left(\frac{A_1}{A_0}\right) - A\left(\frac{A}{A_0}\right) \right] \quad (40)$$

式中
$$A_{(1)} = \int_1^{\xi} \left(1 + \frac{1}{\tau} \right) \tau^{-1/4} e^{\tau/4} d\tau \quad (41)$$

$A_{(1)}$ 的值可从数值积分表上查得。

当 $t = t_2$ 时, $A = A_0$ 而 $A_{(1)} = 0$,从而由式(40)可得:

$$t_2 = \frac{L\sqrt{\lambda}}{2V_0} e^{-R/A} A(A_1/A) \tag{42}$$

最后,从式(17)、(18),可用 A/A_0 来表示 U 和 V ,即

$$U = \frac{V_0}{2\sqrt{\lambda}} \sqrt{\frac{A_0}{A}} \cdot \frac{A}{A_0} \tag{43}$$

$$V = \frac{V_0}{2\sqrt{\lambda}} \sqrt{\frac{A}{A_0}} \left(\frac{A}{A_0} - 1 \right) \tag{44}$$

这样,通过再修正的方程组,已把 U, V, t, h, x 化为 A/A_0 的表达式,它们分别是式(43)、(44)、(40)、(37)、(30)。其中 $\lambda, R, A_1/A_0$ 见式(20)、(21)、(33),均是已知的。

从上面计算结果,还可以求得终止条件的值 t_2, L_2, h_2 ,它们分别用式(28)、(36)、(42)表示。上面所给的解,是以 A/A_0 为参数的参数解。

3 再修正的理论值与原实验值的比较

根据以上结果,已得到了撞击后的弹体变形和撞击速度的关系,即: $\left(\frac{h_2}{L}\right)_2, \left(\frac{L_2}{L}\right)_2, \left(\frac{h_2}{L}\right)_2 + \left(\frac{L_2}{L}\right)_2$ 和 $\lambda = \rho_1 V_0^2 / 2\sigma_p^2$ 的关系曲线,见表1和图2,其中试验点是从 A. C. Whiffins 和 G. I. Taylor 的研究工作^[2]获取的。

表1 再修正理论中的比值

λ	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	1.0	1.5	2.0
$(h_2/L)_2$	0	0.2205	0.2636	0.2811	0.2828	0.2814	0.2495	0.2029	0.1629
$(I_2/L)_2$	1	0.6898	0.5704	0.4848	0.4179	0.3634	0.1925	0.1071	0.0610
$(h_2/L)_2 + (I_2/L)_2$	1	0.9103	0.8340	0.7659	0.7007	0.6448	0.4420	0.3100	0.2239

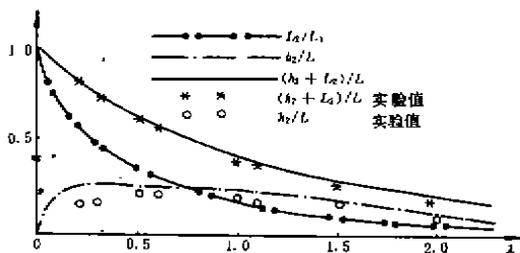


图2 再修正理论中的 $\frac{h_2}{L}, \frac{I_2}{L}, \frac{h_2 + I_2}{L}$ 和 λ 的关系曲线

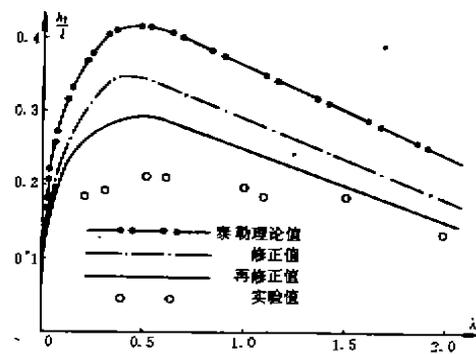


图3

比较式(5)、(10)、(16)知,G. I. 泰勒理论的修正后的冲量是原冲量的2/3;而本文所得到

的再修正冲量是泰勒冲量的1/2,是修正冲量的3/4,通过式(6)、(11)、(36),对于给定的 λ 值,由数值积分可得到它们的不同结果,见表2,表3,图3,图4。

表2 $h_2/L, (h_2/L)_1, (h_2/L)_2$ 和 λ 的关系

λ	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	1.0	1.5	2.0
h_2/L	0	0.2890	0.3688	0.3992	0.4012	0.4010	0.3552	0.2965	0.2469
$(h_2/L)_1$	0	0.2561	0.3060	0.3265	0.3335	0.3330	0.2920	0.2403	0.1958
$(h_2/L)_2$	0	0.2205	0.2636	0.2811	0.2828	0.2814	0.2495	0.2029	0.1629

表3 $(h_2 + L_2)/L, \left(\frac{h_2 + L_2}{L}\right)_1, \left(\frac{h_2 + L_2}{L}\right)_2$ 和 λ 的关系

λ	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	1.0	1.5	2.0
$(h_2 + L_2)/L$	1	0.8950	0.8446	0.7884	0.7264	0.6762	0.4873	0.3651	0.2839
$\left(\frac{h_2 + L_2}{L}\right)_1$	1	0.9134	0.8391	0.7734	0.7144	0.6609	0.4596	0.3313	0.2467
$\left(\frac{h_2 + L_2}{L}\right)_2$	1	0.9103	0.8340	0.7659	0.7007	0.6448	0.4420	0.3100	0.2239

由图3、图4可知,再修正后的理论值 $h_2/L, \left(\frac{h_2 + L_2}{L}\right)_2$ 比泰勒的理论值^[1]及其修正值^[3]均有所降低,使其更接近于实验值。再修正理论的 $\left(\frac{h_2 + L_2}{L}\right)_2$ 与 λ 的关系曲线同实验值吻合较好。因此,如果把再修正理论的关系列出表格,则从 $(h_2 + L_2)/L$ 的实验值用插值法求得 λ 值,再通过公式 $\sigma_p^0 = \rho_s V_0^2 / 2\lambda$ 来计算材料的动态屈服应力。

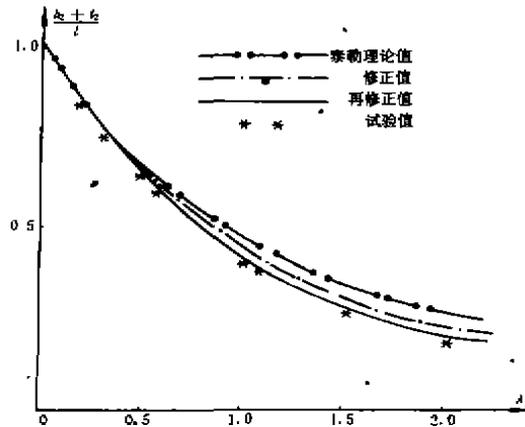


图4 再修正值 $h_2 + L_2/L$ 与 λ 的关系曲线

参 考 文 献

- 1 Taylor G. I. The use of flat-ended projectiles for determining dynamic yield stress, I. theoretical consideration. PROC. of Royal society (London) series A, 1948, 194:289~299
- 2 Whiffins A. C. The use of flat-ended projectiles for determining dynamic yield stress. II. Tests on Various metallic materials. Proc. of Royal Society(London) series A, 1948, 194:300~322
- 3 钱伟长. 柱形弹体撞击塑性变形的G. I. 泰勒理论的分析解及其改正. 应用数学和力学, 1982, 3:743~755