

基于Ⅱ型模糊集的工程参数的评判*

THE ENGINEERING PARAMETER EVALUATION BASED ON Ⅱ-TYPE FUZZY SET

王彩华** 王成良

Wang Caihua Wang Chengliang

(重庆大学工程力学研究所)

摘要 提出了一种基于Ⅱ型模糊集的工程参数模糊综合评判方法。将单因素评判的隶属度和各因素的权数均视为模糊数,应用模糊数的运算规则,建立了相应的模糊综合评判算法。考虑到模糊数运算后展形大大增加的情况,提出了既节省计算又保证精度的展形截断措施。总评判指标的模糊性,以其隶属度为权数进行加权平均处理,从而得到最终的评判结果。并给出了具体算例。

关键词 模糊综合评判; Ⅰ型模糊集; L-R型模糊数

中国图书资料分类法分类号 N03, O159

ABSTRACT A fuzzy comprehensive evaluation method of engineering parameters based on Ⅱ-type fuzzy sets is proposed, and the corresponding fuzzy comprehensive evaluation algorithm following the rule of the operation on fuzzy numbers is set up with the consideration of the membership grades evaluated by the single factor and the weights of all sorts of factors as fuzzy numbers. A measure of the cut of the extension with less computation and adequate accuracy is given since the extension will be greatly increased after the operation on fuzzy numbers. The fuzziness of the final evaluation result is obtained with the weighted average method considering its membership grade as weight.

KEY WORDS fuzzy comprehensive evaluation; Ⅰ-type fuzzy set; L-R fuzzy number

0 引言

模糊综合评判的一个重要前提,是确定单因素评判时的隶属度和因素的权重^[1]。由于影响隶属度和权重的因素往往很多而且比较复杂,故对隶属度和权重的确定难以做得十分准确。说某隶属度或权数“等于0.7”,不如说“约为0.7”更符合客观实际,然而,它们对评判结果却有着较大的影响。因此,如何解决这一矛盾,使难以准确取值的量,不至于过份影响解的结果,便是模糊综合评判应当解决的一个问题。本文针对这一问题,提出了一种基于Ⅱ型模糊

* 收文日期 1989-03-21

国家自然科学基金资助项目

** 广州大学兼职教授

集^[2]的综合评判方法,取得了较好的效果。方法的基本思想是:考虑到隶属度和权数本身的不准确性,分别将它们视为L-R型模糊数^[3](如将隶属度0.7视为模糊数0.7),即将单因素评判集和权重集分别视为备择集和因素集上的Ⅱ型模糊子集;在一般的模糊综合评判的框架上,应用模糊数的运算规则,建立了相应的模糊综合评判算法。考虑到模糊数运算后展形大大增加的情况,采取了既节省计算又保证精度的展形截断措施。该方法所得的总评判集,也是备择集上的Ⅱ型模糊子集。再对每一模糊的总评判指标以其隶属度为权数进行加权平均处理,便可得到最终的确定性评判结果。该方法较一般的模糊综合评判法更能接近客观实际,可获得更加准确的评判结果。

1 Ⅱ型模糊集和L-R型模糊数

1.1 Ⅱ型模糊集

定义1 隶属度为模糊数的模糊集合称Ⅱ型模糊集。论域 U 上的Ⅱ型模糊集 \underline{A} ,满足

$$\begin{aligned} \mu_{\underline{A}}: U &\rightarrow J([0, 1]) \\ u &\mapsto \mu_{\underline{A}}(u) = \underline{a} \in J([0, 1]) \end{aligned} \quad (1)$$

$J([0, 1])$ 为模糊幂集。当 \underline{a} 转换成 $a \in [0, 1]$ 时, \underline{A} 便转换成I型模糊集 \underline{A} 。

1.2 L-R型模糊数

定义2 一个模糊数 \underline{M} 称为L-R型模糊数,当且仅当隶属函数

$$\mu_{\underline{M}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{\alpha_m}\right), & (x \leq m, \alpha_m > 0) \\ R\left(\frac{x-m}{\beta_m}\right), & (x \geq m, \beta_m > 0) \end{cases} \quad (2)$$

其中, L (和 R)为满足条件: $L(x) = L(-x)$, $L(0) = 1$, L 在 $[0, +\infty]$ 上递减的参考函数^[3]。本文取

$$L(x) = \max(0, 1 - |x|) \quad (3)$$

式(2)中, m 为 \underline{M} 的主值, α_m, β_m 为 \underline{M} 的左、右展形; \underline{M} 可简记为

$$\underline{M} = (m, \alpha_m, \beta_m)_{LR} \quad (4)$$

由(2)、(3)两式,得

$$\mu_{\underline{M}}(x) = \begin{cases} 1 - (m-x)/\alpha_m & (m - \alpha_m \leq x \leq m, \alpha_m > 0) \\ 1 - (x-m)/\beta_m & (m \leq x \leq m + \beta_m, \beta_m > 0) \\ 0 & \text{(其它情况)} \end{cases} \quad (5)$$

若另有模糊数 $\underline{N} = (n, \alpha_n, \beta_n)_{LR}$,则

$$\underline{M} + \underline{N} = (m+n, \alpha_m + \alpha_n, \beta_m + \beta_n)_{LR} \quad (6)$$

$$\underline{M} \cdot \underline{N} = (mn, m\alpha_n + n\alpha_m, m\beta_n + n\beta_m)_{LR} \quad (7)$$

2 评判方法

2.1 建立因素集

$$U = \{U_1, U_2, \dots, U_m\} \quad (8)$$

其中, $U_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 为影响评判参数(即评判对象)的第 i 个因素, 可以是模糊的, 也可以是非模糊的^[4]。

2.2 建立备择集

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \quad (9)$$

其中, V 为被评判的工程参数, $v_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 为参数取值区间 $[v_1, v_n]$ 离散后的第 j 个具体的参数值^[4]。

2.3 建立权重集

$$\underline{W} = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_m\} \quad (10)$$

其中, $\underline{w}_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 为第 i 个因素的权数, 为 $L-R$ 型模糊数, 即

$$\underline{w}_i = (w_i, \alpha_{w_i}, \beta_{w_i})_{LR} \quad (11)$$

表示第 i 个因素的权数“约为 w_i ”。 w_i 应满足归一性和非负性条件。显然, \underline{W} 为因素论域上的 \mathbb{I} 型模糊子集。

2.4 单因素评判

如果单独从第 i 个因素出发进行评判, 评判对象能取为备择集中第 j 个元素的程度“约为 τ_{ij} ” ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$), 则得单因素评判集为:

$$\underline{R}_i = \{\underline{\tau}_{i1}, \underline{\tau}_{i2}, \dots, \underline{\tau}_{in}\} (i = 1, 2, \dots, m) \quad (12)$$

其中, $\underline{\tau}_{ij}$ 表示“约为 τ_{ij} ”, 为 $L-R$ 型模糊数, 即

$$\underline{\tau}_{ij} = (\tau_{ij}, \alpha_{\tau_{ij}}, \beta_{\tau_{ij}})_{LR} \quad (13)$$

显然, \underline{R}_i 为备择集上的 \mathbb{I} 型模糊子集。由(12)式, 得单因素评判矩阵

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} \underline{\tau}_{11} & \underline{\tau}_{12} & \dots & \underline{\tau}_{1n} \\ \underline{\tau}_{21} & \underline{\tau}_{22} & \dots & \underline{\tau}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{\tau}_{m1} & \underline{\tau}_{m2} & \dots & \underline{\tau}_{mn} \end{bmatrix} \quad (14)$$

2.5 模糊综合评判

考虑各因素的权重, 综合所有因素评判的结果, 得模糊综合评判集为:

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \underline{W} \cdot \underline{R} \\ &= \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_m\} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\tau}_{11} & \underline{\tau}_{12} & \dots & \underline{\tau}_{1n} \\ \underline{\tau}_{21} & \underline{\tau}_{22} & \dots & \underline{\tau}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{\tau}_{m1} & \underline{\tau}_{m2} & \dots & \underline{\tau}_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n\} \end{aligned} \quad (15)$$

其中:

$$\underline{a}_j = \sum_{i=1}^m \underline{w}_i \cdot \underline{\tau}_{ij} (j = 1, 2, \dots, n) \quad (16)$$

表示按所有因素进行综合评判时, 评判对象能取为备择集中第 j 个元素的程度“约为 a_j ”。 \underline{a}_j 也为 $L-R$ 型模糊数, 即

$$\underline{a}_j = (a_j, \alpha_{a_j}, \beta_{a_j})_{LR} (j = 1, 2, \dots, n) \quad (17)$$

\underline{a}_j 称为模糊综合评判指标。显然, \underline{A} 为备择集上的Ⅱ型模糊子集。

2.6 评判参数的确定

得到模糊综合评判指标 $\underline{a}_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 后, 评判参数 v 的具体确定, 按以下方法进行。

(1) 展形截断。模糊综合评判指标 \underline{a}_j 是由式(16)经过 $2m$ 个模糊数两两相乘而后相加得到的。经过上述运算后, \underline{a}_j 的左、右展形

$$\begin{aligned} \alpha_{nj} &= \sum_{i=1}^m (w_i \alpha_{ni} + r_{ij} \alpha_{ni}) \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\ \beta_{nj} &= \sum_{i=1}^m (w_i \beta_{ni} + r_{ij} \beta_{ni}) \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (18)$$

会大大增加, \underline{a}_j 会变得更加模糊。但在工程上和实际问题中, 人们主要关心的是模糊量的主值及其附近的模糊分布状态, 对远离主值, 其隶属度很小的分布, 可不予考虑。因此, 本文在既节省计算又保证精度的前提下, 采取如下的展形截断措施:

根据问题的性质和需要, 以某一 λ 水平值, 对 \underline{a}_j 作 λ 水平截集:

$$(\underline{a}_j)_\lambda = \{a_j | \mu_{\underline{a}_j}(a_j) \geq \lambda, \lambda \in [0, 1]\} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (19)$$

对隶属度小于 λ 的部分截去不要。

(2) 处理综合评判指标的模糊性。在 $(\underline{a}_j)_\lambda$ 中, 从主值 a_j 开始(包括 a_j), 向左右按等步长取 p 个离散值 $a_{jr} \in (\underline{a}_j)_\lambda (r = 1, 2, \dots, p)$; 再以相应的隶属度 $\mu_{\underline{a}_j}(a_{jr})$ 为权数(当 $a_{jr} < 0$ 时, 令其 $\mu_{\underline{a}_j}(a_{jr}) = 0$), 对各 $a_{jr} (r = 1, 2, \dots, p)$ 进行加权平均, 即

$$\bar{a}_j = \frac{\sum_{r=1}^p a_{jr} \cdot \mu_{\underline{a}_j}(a_{jr})}{\sum_{r=1}^p \mu_{\underline{a}_j}(a_{jr})} \quad (20)$$

加权平均值 $\bar{a}_j (j = 1, 2, \dots, n)$, 即为确定性的综合评判指标。

(3) 参数值的具体确定

a) 按最大隶属度法: 取与 $\max_j \bar{a}_j$ 相应的备择元素 v_s 为参数 v 的值, 即

$$v = \{v_s | v_s \rightarrow \max_j \bar{a}_j\} \quad (21)$$

b) 按加权平均法: 取以 \bar{a}_j 为权数, 对 v_j 进行加权平均的值为参数 v 的值, 即

$$v = \frac{\sum_{j=1}^n \bar{a}_j v_j}{\sum_{j=1}^n \bar{a}_j} \quad (22)$$

最大隶属度法仅考虑了 $\max_j \bar{a}_j$ 一个指标的贡献, 如果备择元素较少或(16)式按取小取大(\wedge, \vee)运算进行综合时, 评判的参数值误差可能较大; 加权平均法则考虑了所有指标的贡献, 根据本文作者的经验, 后者较前者为好^[5]。

3 算 例

3.1 确定许用挠度

文献[6]规定, 安装齿轮的轴的许用挠度应为: $[Y] \leq (0.01 \sim 0.05)m_n, m_n$ 为齿轮的法面模数。现用本文的方法确定某机床齿轮轴的许用挠度。

因素集为: $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$

其中, $u_1 =$ 挠度对整机性能的影响大,

$u_2 =$ 设计水平较高,

$u_3 =$ 制造安装水平较低,

$u_4 =$ 工作条件好.

将取值区间 $[0.01, 0.05]$ 按步长 0.005 离散为 9 个值,得备择集为:

$$Y = \{0.010, 0.015, 0.020, \dots, 0.045, 0.050\}$$

根据各因素影响挠度的重要程度,得权重集为:

$$W = \{(0.429, 0.222, 0.190), (0.286, 0.156, 0.190), \\ (0.190, 0.113, 0.159), (0.095, 0.00, 0.127)\}$$

单因素评判矩阵(其元素均为模糊数)为:

$$R = \begin{bmatrix} 0.90 & 0.85 & 0.80 & 0.70 & 0.50 & 0.35 & 0.30 & 0.10 & 0.03 \\ 0.05 & 0.15 & 0.25 & 0.45 & 0.60 & 0.75 & 0.85 & 0.80 & 0.75 \\ 0.20 & 0.35 & 0.55 & 0.75 & 0.80 & 0.90 & 0.75 & 0.65 & 0.45 \\ 0.03 & 0.10 & 0.20 & 0.35 & 0.55 & 0.70 & 0.80 & 0.85 & 0.80 \end{bmatrix}$$

模糊综合评判集为:

$$\underline{A} = \underline{W} \cdot \underline{R} = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_9\}$$

其中

$$\underline{a}_1 = (0.441, 0.261, 0.401) \quad \underline{a}_2 = (0.483, 0.319, 0.502)$$

$$\underline{a}_3 = (0.538, 0.368, 0.544) \quad \underline{a}_4 = (0.605, 0.408, 0.698)$$

$$\underline{a}_5 = (0.590, 0.421, 0.715) \quad \underline{a}_6 = (0.602, 0.434, 0.737)$$

$$\underline{a}_7 = (0.548, 0.413, 0.716) \quad \underline{a}_8 = (0.485, 0.382, 0.679)$$

$$\underline{a}_9 = (0.389, 0.321, 0.576)$$

经加权平均处理后,得确定性综合评判指标集为:

$$A = \{0.445, 0.487, 0.542, 0.610, 0.595, 0.607, \\ 0.552, 0.489, 0.392\}$$

最后,按最大隶属度法得: $y = 0.0250$;按加权平均法得: $y = 0.0298$.于是,该轴的许用挠度为

$$[y] = 0.0250mm \text{ 或 } [y] = 0.0298mm$$

通常取加权平均值 $[y] = 0.0298mm$.

3.2 确定齿轮的动载系数

文献[6]规定,斜齿圆柱齿轮的动载系数应为: $K_v = 1.0 \sim 1.5$.这是一较大范围.现用本文的方法确定某齿轮动载系数的具体值.

因素集为: $U = \{u_1, u_2, \dots, u_5\}$

其中:

$u_1 =$ 设计水平较高,

$u_2 =$ 制造水平较高,

$u_3 =$ 齿轮精度中等,

$u_4 =$ 基圆齿距误差较小,

$u_5 =$ 齿形误差较小,

- u_6 = 啮合刚度中等,
 u_7 = 轴的刚度较大,
 u_8 = 轴承刚度中等,
 u_9 = 受载后变形较小,
 u_{10} = 传动载荷较大,
 u_{11} = 齿轮重量中等,
 u_{12} = 圆周速度较小,
 u_{13} = 润滑状况一般,
 u_{14} = 与该齿轮有关的结构重要。

将取值区间[1.0, 1.5]按步长0.05离散为11个值,得备择集为:

$$K_r = \{1.0, 1.05, 1.10, \dots, 1.45, 1.50\}$$

根据各因素影响齿轮动载系数取值的重要程度,得权重集(其权数均为模糊数)为:

$$\begin{aligned}
 W \approx & \{0.0693, 0.0792, 0.0792, 0.0891, 0.0792 \\
 & 0.0891, 0.0693, 0.0693, 0.0693, 0.0792 \\
 & 0.0891, 0.0495, 0.0594, 0.0396, 0.0594\}
 \end{aligned}$$

单因素评判矩阵(其元素均为模糊数)为:

$$R \approx = \begin{bmatrix}
 0.7 & 0.8 & 0.9 & 1.0 & 0.9 & 0.7 & 0.5 & 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\
 0.7 & 0.8 & 0.9 & 1.0 & 0.9 & 0.7 & 0.5 & 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\
 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.9 & 1.0 & 0.8 & 0.6 & 0.4 & 0.2 \\
 0.2 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.6 & 0.5 & 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.4 \\
 0.2 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.6 & 0.5 & 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.4 \\
 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.9 & 1.0 & 0.8 & 0.6 & 0.4 & 0.2 \\
 0.7 & 0.8 & 0.9 & 1.0 & 0.9 & 0.7 & 0.5 & 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\
 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.9 & 1.0 & 0.8 & 0.6 & 0.4 & 0.2 \\
 0.7 & 0.8 & 0.9 & 1.0 & 0.9 & 0.7 & 0.5 & 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\
 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.6 & 0.5 & 0.4 & 0.3 \\
 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.9 & 1.0 & 0.8 & 0.6 & 0.4 & 0.2 \\
 0.7 & 0.8 & 0.9 & 1.0 & 0.9 & 0.7 & 0.5 & 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\
 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.9 & 1.0 & 0.8 & 0.6 & 0.4 & 0.2 \\
 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.6 & 0.5 & 0.4 & 0.3
 \end{bmatrix}$$

模糊综合评判集为

$$\begin{aligned}
 A \approx & = W \approx \cdot R \approx = \{a_1, a_2, \dots, a_{11}\} \\
 & = \{(0.356, 0.218, 0.277), (0.475, 0.257, 0.366), \\
 & (0.607, 0.270, 0.370), (0.707, 0.303, 0.365), \\
 & (0.727, 0.293, 0.406), (0.712, 0.283, 0.414), \\
 & (0.679, 0.253, 0.365), (0.547, 0.213, 0.402), \\
 & (0.415, 0.191, 0.315), (0.284, 0.145, 0.260), \\
 & (0.152, 0.106, 0.232)\}
 \end{aligned}$$

经加权平均处理后,得确定性综合评判指标集为:

$$\Lambda = \{0.359, 0.481, 0.616, 0.714, 0.714, 0.727, \\ 0.695, 0.564, 0.424, 0.289, 0.154\}$$

最后,按最大隶属度法和加权平均法分别得该斜齿圆柱齿轮的动载系数为:

$$K_r = 1.20 \quad \text{和} \quad K_r = 1.2265$$

通常取加权平均值 $K_r = 1.2265$ 。

4 结 语

- 1) 本文把隶属度和权数视为模糊数,能更好地反映客观实际,因而使评判结果能更为准确。
- 2) 本文只考虑了一级模糊综合评判,但其观点和方法可推广到各种多级模糊综合评判中去。
- 3) 本文虽然仅针对工程设计参数评判进行讨论,但其方法步骤可应用于评判各种事物。

参 考 文 献

- 1 王光远. 论综合评判几种数学模型的实质及其应用. 模糊数学, 1984, 4(4): 81~87
- 2 李安华, 吴达. 模糊数学基础及其应用. 乌鲁木齐: 新疆人民出版社, 1986
- 3 Dubis D. and Prade H. Fuzzy Sets and Systems. Theory and Applications, Academic Press, New York, 1980
- 4 Wang Caihua, Lu Enlin. Fuzzy Comprehensive Evaluation of Engineering Design Parameters With Two Steps, First World Congress on Computational Mechanics, University of Texas At Austin, USA, 1986
- 5 王彩华, 宋连天. 模糊论方法学. 北京: 中国建筑工业出版社, 1988
- 6 机械工程手册. 电机工程手册编辑委员会. 北京: 机械工业出版社, 1983