

②  
13-18

# 三点弯曲圆梁断裂试样的稳定性因子

## STABILITY FACTORS OF THREE-POINT BEND ROUND BEAM SPECIMENS FOR FRACTURE TESTING

王启智  
Wang Qizhi

鲜学福  
Xian Xuefu

(重庆大学资源及环境工程系)

0346.1

**摘要** 给出了一个计算三点弯曲圆梁试样的稳定性因子的方法,并将计算结果与其它试样进行了比较。

**关键词** 断裂力学; 三点弯曲圆梁试样; 裂纹扩展稳定性; 稳定性因子。

中国图书资料分类法分类号 O346.1

**ABSTRACT** Crack growth stability is very important for fracture toughness testing of brittle materials. The width of crack for a three-point bend round beam specimen changes continuously during the process of crack extension, so that the analysis of crack growth stability becomes complicated for this kind of specimen. This paper presents a method for calculating its stability factors, and the results of the calculation are compared with those of other specimens.

**KEY WORDS** fracture mechanics; three-point bend round beam specimen, crack growth stability, stability factor.

### 0 引 言

许多脆性材料,如硬质合金、陶瓷、岩石等都是难以加工的,这些材料以圆柱形的外形容易获得。用三点弯曲试样测定其断裂韧度时,直接采用原始的圆形截面梁(以下简称圆梁,图1)比较方便。

试样的裂纹扩展稳性对于断裂韧度测试是重要的,对于脆性材料以及当试验机的刚度不太高时,这方面的问题显得尤其尖锐。Bluhm<sup>[1]</sup>提出了一个分析断裂试样稳定性的参数,即稳定性因子,并研究了各种矩形截面

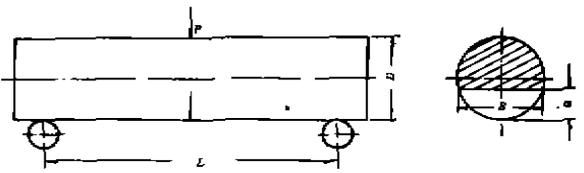


图1 三点弯曲圆梁试样

的三点弯曲试样;利用文献[1]的思想,Baratta<sup>[2]</sup>研究了矩形截面的三点弯曲和四点弯曲试样,笔者<sup>[3]</sup>曾研究了具有人字形切槽的三点弯曲圆梁和短圆棒试样,本文要研究的是具有贯穿直裂纹的三点弯曲圆梁试样(图1)的稳定性因子。

\* 收文日期 1991-03-19

## 1 稳定性因子通式

Irwin—Kies 的能量释放率  $G_1$  的表达式如下:

$$G_1 = \frac{P^2}{2} \cdot \frac{dC_t}{dA} \quad (1)$$

其中,  $P$  是载荷,  $C_t$  是整个系统的柔度, 它包括试样的柔度  $C_s$  和试验机的柔度  $C_m$ ,  $A$  是裂纹面积。

以  $G_{1c}$  代表临界能量释放率, 裂纹开始扩展的条件是  $G_1 = G_{1c}$ , 若要保持裂纹的稳定扩展, 应满足以下条件

$$\frac{dG_1}{dA} \leq \frac{dG_{1c}}{dA} \quad (2)$$

对于脆性材料, 可以认为  $G_{1c}$  与裂纹扩展无关, 即

$$\frac{dG_{1c}}{dA} = 0 \quad (3)$$

由(2)(3)两式得到

$$\frac{dG_1}{dA} \leq 0 \quad (4)$$

(4)式表明, 裂纹的稳定扩展要求能量释放率对裂纹面积的变化率是负的, 最多为零。

将(1)式的两端分别对  $A$  求导, 得到

$$\frac{dG_1}{dA} = \frac{1}{2} \left[ P^2 \frac{d^2 C_t}{dA^2} + 2P \frac{dP}{dA} \cdot \frac{dC_t}{dA} \right] \quad (5)$$

在恒载荷加载条件下, 由于  $\frac{dP}{dA} = 0$ , 故有

$$\left( \frac{dG_1}{dA} \right)_P = \frac{1}{2} P^2 \frac{d^2 C_t}{dA^2} = \frac{1}{2} P^2 \frac{dC_t}{dA} \cdot \frac{\frac{d^2 C_t}{dA^2}}{\frac{dC_t}{dA}} = G_{1c} \frac{\frac{d^2 C_t}{dA^2}}{\frac{dC_t}{dA}} \quad (6)$$

式中用  $G_{1c}$  代替  $\frac{1}{2} P^2 \frac{dC_t}{dA}$  是由于裂纹已开始扩展。

在恒位移条件下, 注意  $C_t = \delta/P$ ,  $\delta$  是试样施力点位移, 此时  $\frac{dP}{dA} = \delta \cdot \left( -\frac{1}{C_t^2} \right) \cdot \frac{dC_t}{dA}$ , 将此式代入(5)式得到

$$\left( \frac{dG_1}{dA} \right)_\delta = G_{1c} \frac{\frac{d^2 C_t}{dA^2} - \frac{2}{C_t} \left( \frac{dC_t}{dA} \right)^2}{\frac{dC_t}{dA}} \quad (7)$$

由于  $C_t = C_s + C_m$ , 而  $\frac{dC_m}{dA} = 0$ ,  $\frac{d^2 C_m}{dA^2} = 0$ , 故(6)、(7)两式中的  $\frac{dC_t}{dA}$  和  $\frac{d^2 C_t}{dA^2}$  都可以分别代之以  $\frac{dC_s}{dA}$  和  $\frac{d^2 C_s}{dA^2}$ 。分别将  $\left( \frac{dG_1}{dA} \right)_P$  和  $\left( \frac{dG_1}{dA} \right)_\delta$  乘  $\frac{A_0}{G_{1c}}$  进行无量纲化, 这里  $A_0$  是试样的横截面积 ( $A_0 = \frac{1}{4} \pi D^2$ ), 于是得到恒载荷下的稳定性因子  $S_P$  和恒位移下的稳定性因子  $S_\delta$ , 即

$$S_p = A_0 \cdot \frac{\frac{d^2 C_s}{dA^2}}{\frac{dC_s}{dA}} \quad (8)$$

$$S_s = S_p - A_0 \cdot \frac{2}{C_s} \cdot \frac{dC_s}{dA} \quad (9)$$

显然, 裂纹的稳定扩展分别要求  $S_p \leq 0$  和  $S_s \leq 0$ 。文献[2]在定义稳定性因子时少除了一项  $\frac{dC_s}{dA}$ 。(8)、(9) 两式是适用于所有试样的稳定性因子表达式。

## 2 三点弯曲圆梁的柔度及其导数

为了计算稳定性因子, 必须知道试样的柔度  $C_s$  及其导数  $\frac{dC_s}{dA}$  和  $\frac{d^2 C_s}{dA^2}$ 。

先讨论试样的柔度  $C_s$ , 此时, 试样施力点的位移只考虑试样的贡献, 即

$$\delta_s = \delta_w + \delta_c \quad (10)$$

其中,  $\delta_w$  是没有裂纹时圆梁的挠度,  $\delta_c$  是有裂纹存在时的附加挠度。

由材料力学<sup>[5]</sup>知

$$\delta_w = \frac{P}{ED} \left[ \frac{4}{3\pi} \cdot \left( \frac{L}{D} \right)^3 + \frac{8}{3\pi} (1 + \mu) \frac{L}{D} \right] \quad (11)$$

其中,  $E$  是弹性模量,  $\mu$  是泊松比,  $\mu$  取 0.3。(11) 式的两部分分别代表弯曲和剪切所产生的挠度。

由断裂力学知

$$\delta_c = \frac{\partial \int_0^a G_1 dA}{\partial P} = \frac{\partial \int_0^a G_1 B D da}{\partial P} \quad (12)$$

其中,  $a$  是无量纲裂纹长度,  $a = a/D$ ,  $B$  是裂纹前沿宽度(图1), 并由几何关系得到

$$B = 2Da^{1/2}(1-a)^{1/2} \quad (13)$$

将(13)式代入(12)式, 并利用  $G_1 = K_1^2/E$ ,  $K_1$  是应力强度因子, 于是有

$$\delta_c = \frac{2D^2}{E} \frac{\partial \int_0^a K_1^2 a^{1/2} (1-a)^{1/2} da}{\partial P} \quad (14)$$

三点弯曲圆梁试样的  $K_1$  表达式见文献[6], 即

$$K_1 = \frac{PLa^{1/2}}{D^{5/2}(1-a)^2} \cdot f(a) \quad (15)$$

其中,  $f(a)$  是关于  $a$  的多项式, 在文献[6]中对于  $L/D = 3.33$  和  $4 \leq L/D \leq 6.67$  分别有具体的形式。将(15)式代入(14)式有

$$\delta_c = \frac{4PL^2}{ED^3} \int_0^a a^{3/2} \cdot (1-a)^{-7/2} \cdot f^2(a) da \quad (16)$$

将(11)和(16)两式代入(10)式就得到三点弯曲圆梁试样的无量纲柔度  $C_s$  如下:

$$C_s = \frac{4}{3\pi} \left( \frac{L}{D} \right)^3 + \frac{8}{3\pi} (1 + \mu) \frac{L}{D} + 4 \left( \frac{L}{D} \right)^2 \int_0^a a^{3/2} \cdot (1-a)^{-7/2} \cdot f^2(a) da \quad (17)$$

其中已定义了  $C_s = \frac{\delta_s ED}{P}$ 。

在裂纹扩展时有  $dA = B \cdot da$ , 并注意  $B$  与  $a$  的关系式(13), 可以推出

$$\frac{dC_s}{dA} = \frac{1}{B} \frac{dC_s}{da} = \frac{1}{BD} \frac{dC_s}{da} \quad (18)$$

$$\frac{d^2C_s}{dA^2} = \frac{1}{B^2 D^2} \frac{d^2C_s}{da^2} - \frac{1}{B^3 D} [\alpha^{1/2}(1-\alpha)^{1/2} - \alpha^{1/2}(1-\alpha)^{-1/2}] \frac{dC_s}{da} \quad (19)$$

至此,  $C_s$ ,  $\frac{dC_s}{dA}$  和  $\frac{d^2C_s}{dA^2}$  已经全部已知, 其中(18)、(19)两式中的  $\frac{dC_s}{da}$  和  $\frac{d^2C_s}{da^2}$  均可分别从(17)式中求出。

### 3 三点弯曲圆梁的稳定性因子

将(17)(18)(19)式代入(8)式和(9)式分别得到三点弯曲圆梁试样的稳定性因子如下:

$$S_p = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{1}{\alpha^{1/2}(1-\alpha)^{1/2}} \left[ 2 \frac{df(\alpha)}{d\alpha} + \frac{1+3\alpha}{\alpha(1-\alpha)} \right] \quad (20)$$

$$S_s = S_p - \pi \cdot \left( \frac{L}{D} \right)^2 \cdot \frac{1}{C_t} \cdot \alpha(1-\alpha)^4 \cdot f^2(\alpha) \quad (21)$$

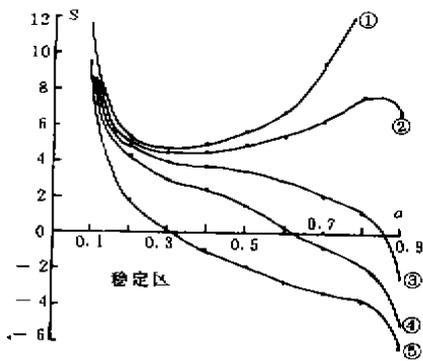


图2 三点弯曲圆梁的稳定性因子  
( $L/D = 3.33$ )

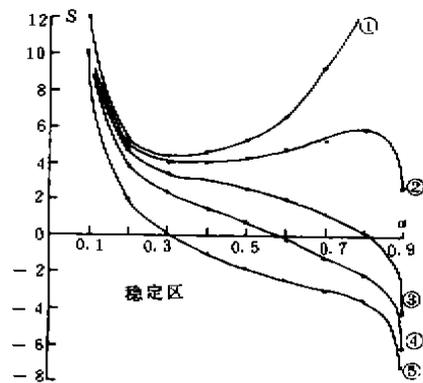


图3 三点弯曲圆梁的稳定性因子  
( $L/D = 4$ )

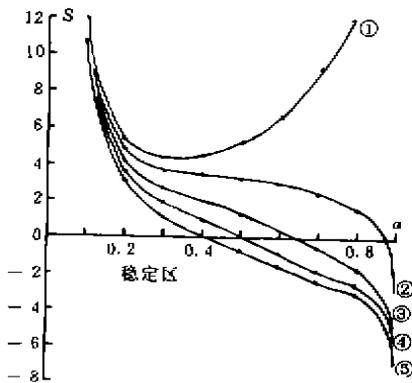


图4 三点弯曲圆梁的稳定性因子  
( $L/D = 6.67$ )

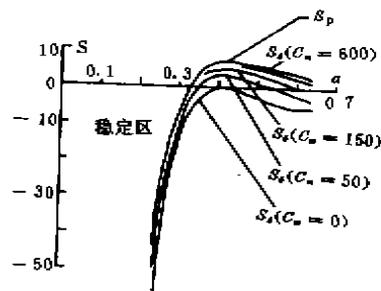


图5 一种人字形切槽三点弯曲圆梁  
的稳定性因子<sup>[2]</sup>

(21)式中的 $C_1 = C_0 + C_m$ ,此后,柔度均采用无量纲形式,因此试验机柔度要乘 $ED$ 后才是 $C_m$ ,由(21)式可以看出试验机柔度在恒载荷条件下对裂纹扩展的稳定性是有影响,为了研究这种影响,以及研究加载方式,试样几何参数 $L/D$ 和 $\alpha$ 对稳定性的影响,将(20)和(21)式编入计算机程序在Siemens7.570c机上运行,其中试样柔度 $C_1$ ,算式(17)中的积分采用龙贝格(Romberg)数值积分方法。计算结果分别绘制在图2、图3和图4中。在这三幅图中,①代表 $S_p$ ,②代表 $S_s(C_m = 600)$ ,③代表 $S_s(C_m = 150)$ ,④代表 $S_s(C_m = 50)$ ,⑤代表 $S_s(C_m = 0)$ 。

为了便于比较,将文献[3]中的一种具有人字形切槽的三点弯曲圆梁试样( $L/D = 3.33$ ,其它参数略)的稳定性因子复制在图5中。分析这些图可以看出:

1) 恒载荷下的 $S_p > 0$ ,因而不可能实现裂纹的稳定扩展。这一结论与Bluhm<sup>[2]</sup>对矩形截面梁得到的结论相同。

2) 对每一个试验机无量纲柔度值 $C_m$ 和每一种跨度直径比 $L/D$ ,都有一个临界的无量纲裂纹长度 $\alpha_0 (= a_0/D)$ ,当 $\alpha \geq \alpha_0$ 时才会有 $S_s \leq 0$ ,即裂纹的扩展是稳定的。例如,设材料的 $E = 200\text{GPa}$ ,试样直径 $D = 50\text{mm}$ ,试验机刚度为 $200\text{kN/mm}$ (普通材料试验机的刚度为 $100 \sim 300\text{kN/mm}$ ),则可以算出 $C_m = 50$ ,若取 $L/D = 3.33$ ,则 $\alpha_0 = 0.62$ ;若 $L/D = 4$ ,则 $\alpha_0 = 0.58$ ;若 $L/D = 6.67$ ,则 $\alpha_0 = 0.5$ 。

3) 减小 $C_m$ 值可以增加裂纹扩展的稳定性,这一方面可以通过增加试验机的刚度,另一方面通过减小试样的直径 $D$ 来实现。

4) 当 $L/D$ 增加时,除了 $C_m = 0$ 外,都有 $\alpha_0$ 减小的趋势,因而 $\alpha \geq \alpha_0$ 的条件容易满足,裂纹可以稳定扩展的长度 $(1 - \alpha_0)$ 也越长,因此试样的稳定性更好。2)中举出算例所得的 $\alpha_0$ 即是图2、3和4中各自的曲线④在 $\alpha$ 轴上交点值,表明了 $L/D$ 和 $\alpha_0$ 间的变化趋势。

5) 图5代表一种新型的人字形切槽试样(参见文献[3][4])的稳定性因子 $S$ ,这种试样具有‘人’字形的切槽,其裂纹扩展的变化形态与本文分析的直裂纹试样(图1)是完全不同的。人字形切槽试样初始裂纹扩展时的 $S$ 值是绝对值很大的负数,在图5中和图2可以看出,在裂纹扩展的初始阶段,人字形切槽试样的稳定性大大优于对应的直裂纹试样。当然从前者 $S_s$ 的变化趋势看出中间一段可能有 $S_s > 0$ ,但这一点并不重要,因为这种试样的测试临界点是 $\alpha_c = 0.337$ <sup>[4]</sup>,它在图5中仍可位于稳定区的范围内。而且,经过短暂的不稳定过程后,又回到了稳定区。

6) 将图4与对应的矩形截面梁(文献[2]的图3a)比较可知,三点弯曲圆梁的稳定性优于与之对应的矩形梁。例如对 $C_m = 50$ ,圆梁的 $\alpha_0 = 0.58$ ,而矩形梁的 $\alpha_0 = 0.64$ 。

## 4 结 论

1) 本文给出的(8)式和(9)式适用于计算所有试样的稳定性因子,本文的(20)式和(21)式是计算三点弯曲圆梁稳定性因子的具体公式,由计算结果绘制的图2、图3和图4对于指导利用该试样进行断裂韧性测试是有意义的。分析结果表明,为了实现稳定的裂纹扩展,测试应在控制位移的条件下进行,并由试验机无量纲柔度 $C_m$ (取决于试验机刚度,试样直径 $D$ 和被测定材料的杨氏弹性模量 $E$ ),跨度直径比 $L/D$ 决定一个临界裂纹长度 $\alpha_0 (= a_0/D)$ ,试样的裂纹长度 $\alpha (= a/D)$ 应满足 $\alpha \geq \alpha_0$ 。

2) 对于一般的试验机,提高试验机刚度,对试样增大  $L/D$ ,减小  $D$  都可以提高试样测试中裂纹扩展的稳定性,当然试样几何参数的选择还应受到其它要求的限制。

3) 在利用稳定性因子进行裂纹扩展稳定性的评价方面,本文研究的三点弯曲圆梁试样优于对应的矩形截面梁,次于具有人字形切槽的三点弯曲圆梁。

4) 某些脆性材料仍然具有一种上升的阻力曲线,此时(3)式应改成  $\frac{dG_{Ic}}{dA} > 0$ , (4)式相应地改为  $\frac{dG_{Ic}}{dA} \leq \text{正数}$ ,最后,裂纹稳定扩展要求  $S_a \leq \text{正数}$ ,而本文的判据是  $S_a \leq 0$ ,因此本文的稳定性分析偏于保守,考虑阻力曲线变化因素的稳定性分析将是进一步的工作。

### 参 考 文 献

- 1 Bluhm J I. Stability Consideration in the Generalized Three Dimensional Work of Fracture Specimen. ICF4, Waterloo, Canada, 1977, 3A, 407~417
- 2 Baratta F I. Crack Stability in Two Brittle Nonmetallic Beam Systems, Experimental Mechanics, 1988, 28, 310~315
- 3 王启智,鲜学福. 两种岩石断裂韧度试样测试的稳定性分析,实验力学,1991,6(3),264~271
- 4 Wang Qizhi and Xian Xuefu. A Method for Calculating Stress Intensity Factors of Chevron-Notched Three-Point Bend Round Bars. International Journal of Fracture, 1990, 45(3), R37~R41
- 5 S. Timoshenko 等著,胡人礼译. 材料力学,科学出版社,1978,256~264
- 6 Underwood J H and Woodward R L. Wide Range Stress-intensity-factor Expression for an Edge-cracked Round Bar Bend Specimen, Experimental Mechanics, 1989, 29, 166~168