

提高 FFT 和谱分析速度及精度的方法

THE METHOD OF IMPROVING THE SPEED AND ACCURACY OF FFT AND SPECTRUM ANALYSIS

④
H-57

丁康
Ding Kang

谢明
Xie Ming

TP274.2

(重庆大学测试中心)

摘要 FFT(快速傅里叶变换)是频谱分析的核心。本文讨论提高 FFT 速度和精度的方法,以此为基础实现的频谱分析,其速度和精度均达到很高指标。其中幅谱幅值误差小于 1%,1024 点复数 FFT 时间小于 250ms,32 段谱分析时间只需 5s。

关键词 数据处理;信号分析;信号处理;频谱分析, FFT
中国图书资料分类法分类号 TH865

ABSTRACT FFT(Fast Fourier Transform)is the basis of spectrum analysis. This paper gives out a method which can improve the speed and accuracy of FFT. The spectrum analysis based on the proposed method is of a high level; the amplitude error of spectrum is less than 1%, the time of completing 1024 complex points FFT and 32 segments spectrum analysis is less than 250ms and only 5 seconds respectively.

KEY WORDS Data handling; Signal analysis; Signal processing; Spectrum analysis.

1 引言

FFT 算法是库利-图基 1965 年在《计算数学》杂志上首先提出的。从此以后,它作为频谱分析的基础得到广泛应用。不论是用硬件,还是软件实现谱分析运算主要采用 FFT 算法。

以硬件 FFT 为基础的频谱分析仪速度快,1024 点复数 FFT 速度最快可达几十毫秒,如 HP5423A、CF-940 和 SD-380Z 等。但其造价高、价格昂贵、使用灵活性差。以软件为基础的频谱分析系统,由于计算机的普及和推广,正在得到越来越广泛的应用。但是软件进行谱分析存在着下列几个主要问题:

1)FFT 以及谱分析速度较慢,据国内有关资料记载,现行 1024 点复数 FFT 最快时间约 600ms,一般约需 1~2s 才能完成,这远远不能满足工程界和实时分析的需要

2)FFT 以及谱分析的精度问题。由于计算机只能对有限多个样本进行计算,所以 FFT 也只能在有限区间内进行,这就不可避免地存在由于时域截断而产生的能量泄漏,使谱分析幅值变小,并有假频即旁瓣产生。

3) 整型数 FFT 运算速度快, 但计算误差较大; 实型 FFT 运算速度较慢, 但计算精度高。怎样才能有效地获得一种运算速度快、且精度高的整型 FFT 算法?

2 提高 FFT 速度和精度的方法

对于一个等时间间隔序列 $\{X_k\} (k = 0, 1, 2, \dots, N-1)$, 其有限长度的傅里叶变换 (DFT) 为:

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j2\pi kn/N} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k (\cos 2\pi kn/N - j \sin 2\pi kn/N) \quad (1)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

其双边自功率谱密度函数为:

$$G_{xx}(n) = 2 * X_n \cdot X_n^* \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2)$$

快速傅里叶变换的算法要经过重新排序、蝶形运算和结果分离三个步骤, 图1是本文采用的 FFT 算法程序框图, 它采用了下列方法来提高 FFT 的速度和精度。

首先在计算机语种方面采用计算速度最快的汇编语言, 在数据类型方面采用最省时的整型数运算以提高速度。不论是 BASIC、还是 FORTRAN 和其它语言, 其运算速度都低于汇编语言, 所以采用汇编语言是提高 FFT 运算速度的有效方法之一。而在数据类型上, 由于 A/D 变换后的数据一般均为整型数, 整型数只占两个字节 16 个 bit, 所以用整型数作乘法或加法运算都是最省时间的。

其次是引进校正因子以提高整型数据运算的 FFT 精度。用整型数进行 FFT 运算, 当数值较大时, 其乘法和加法的运算结果可能超出整型数的运算范围; 而当数值很小时, 运算将带来很大误差。为了避免这种情况产生, 引进了校正因子。在每一次排序和蝶形运算时, 首先搜索要计算的数据绝对值最大的值, 根据此值的大小将整个进行蝶形运算的数据放大或缩小到一个合适的比例, 这样运算结果的精度很高。最后将每次蝶形运算的校正值相乘就是整个 FFT 运算的总校正值, 将此值乘以 FFT 计算结果得到实型数的最终结果。所以虽然 FFT 是用整型数据进行运算, 但校正之后的 FFT 最终结果是实型数据, 从而大大提高了 FFT 精度。

采用三角函数库以提高 FFT 速度也是方法之一。在进行蝶形运算时, 最费时间的是三角函数运算, 当时间序列 $\{X_k\}$ 的项目 N 确定以后, $W_N^k = e^{-j2\pi kn/N} (k = 0, 1, \dots, N-1)$ 可以组成一个不变的数据库。这个数据库共有 $2N$ 个已经计算好的三角函数值, 并按一定比例放大成整数后供程序调用。这样就节省了三角函数的运算时间而大大提高了 FFT 速度。

最后采用窗函数库以提高 FFT 的速度和精度。为了减少因时域截断而产生的频谱泄漏现象, 除了矩形窗 (不加窗) 外还提供有指数窗、哈宁窗、海明窗、高斯窗、平顶窗和凯泽一贝

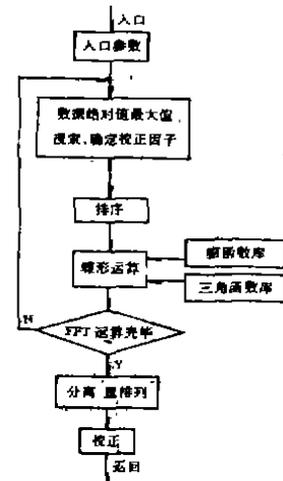


图1 汇编语言 FFT 程序框图

塞尔六种窗函数。这六种窗函数的形状见图，其功能都是为了抑制泄漏，减小主瓣和旁瓣的比值，但是同时使主瓣的幅值降低。为了使加窗后的功率谱幅值不受窗函数的影响，根据能量不变的原理推导出放大因子为：

$$K = \frac{\int_0^T x^2(t)dt}{\int_0^T |W(t) * x(t)|^2 dt} \quad (3)$$

令 $x(t) = 1$ ，就得到加 $W(t)$ 窗函数的放大因子。

在FFT计算中，采用了窗函数库，这样容纳的窗函数多，且计算时间短，可以提高加窗FFT速度。

表I是采用图1的程序，在时钟频率为8MHz的AST286微机上用50段平均测得的1024点复数FFT的时间。其不加窗的时间小于250ms，加窗运算时间仅比不加窗增加9.9%。

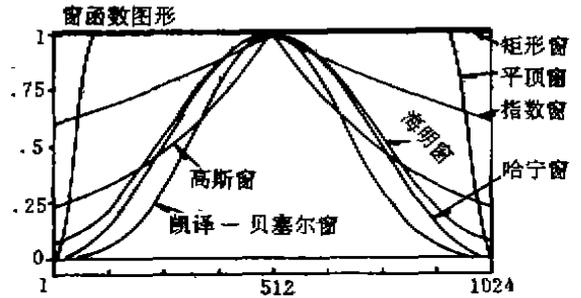


图2 各种窗函数图形

表1 1024点复数FFT时间

类 型	正变换不加窗	正变换加哈宁窗	逆变换不加窗	逆变换加哈宁窗
8MHz 时钟频率				
1024点复数FFT时间	235ms	258ms	239ms	263ms

3 提高功率谱分析速度和精度的方法

图3是本文所采用的谱分析框图。提高谱分析的速度和精度采用了下列三种方法：

首先是将采样得到的两段整型实函数一次用复FFT完成，并以一定的方法分离结果，合成自谱。这样可以提高速度近一倍左右。

当希望从下列函数

$$x(k) = h(k) + jg(k) \quad (4)$$

同时计算两个实型函数 $h(k)$ 和 $g(k)$ 的离散傅里叶变换时，由线性性质， $x(k)$ 的离散傅里叶变换由下式给出：

$$\begin{aligned} X(n) &= H(n) + jG(n) \\ &= [H_r(n) - G_i(n)] + j[H_i(n) + G_r(n)] \\ &= R(n) + jI(n) \end{aligned} \quad (5)$$

将 $X(n)$ 的实部 $R(n)$ 和虚部 $I(n)$ 分解为偶函数和奇偶数

$$\begin{aligned} X(n) &= \left[\frac{R(n)}{2} + \frac{R(N-n)}{2} \right] + \left[\frac{R(n)}{2} - \frac{R(N-n)}{2} \right] \\ &\quad + j \left[\frac{I(n)}{2} + \frac{I(N-n)}{2} \right] + j \left[\frac{I(n)}{2} - \frac{I(N-n)}{2} \right] \end{aligned} \quad (6)$$

对于复时间函数只有实部进行傅里叶变换，实部为偶函数，虚部为奇函数，故有：

$$H(n) = \left[\frac{R(n)}{2} + \frac{R(N-n)}{2} \right] + j \left[\frac{I(n)}{2} - \frac{I(N-n)}{2} \right] \quad (7)$$

同理复时间函数只有虚部进行傅里叶变换,实部为奇函数,虚部为偶函数,故有:

$$G(n) = \left[\frac{I(n)}{2} + \frac{I(N-n)}{2} \right] - j \left[\frac{R(n)}{2} - \frac{R(N-n)}{2} \right] \quad (8)$$

式(7)和(8)是两段实时间函数的离散傅里叶变换同时完成后进行结果分离的公式。

第二是运算工作量大的部分均采用汇编语言以提高速度。本程序一共采用了四个汇编语言子程序。当采用两段 FFT 一次完成,以汇编语言进行结果分离合成自谱这两个步骤后,32段谱分析时间从15秒降低到5秒,大大提高了分析速度。

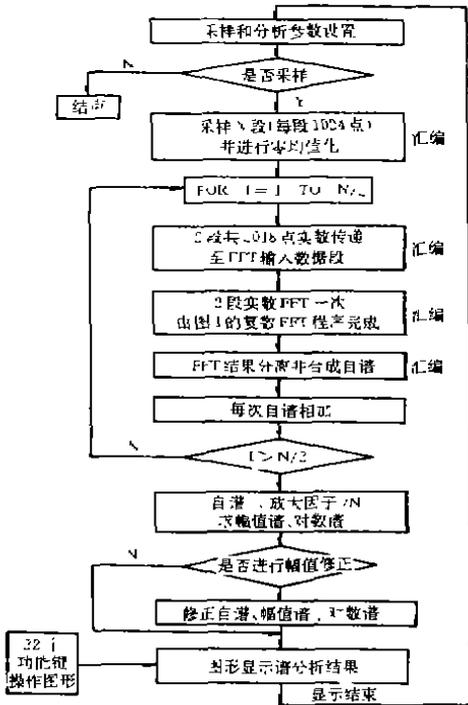


图3 谱分析程序框图

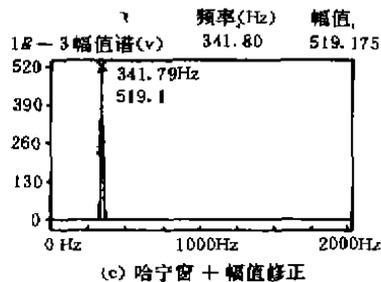
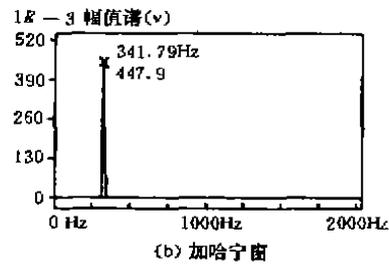
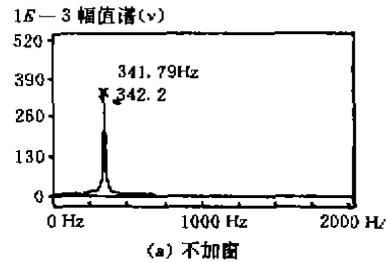


图4 不加窗、哈宁窗及幅值修正的幅值谱比较

第三是采用幅值修正以提高谱分析精度。在进行不加窗谱分析时,如果实际频率正好位于离散的某两个相邻频率正中间,最好结果是这个频率的功率均匀分布到相邻的两个频率上,这时的幅值误差为29.6%。图4(a)是某一频率为340Hz、幅值为524.1mv的正弦信号不加窗的谱分析结果,由于上述原因,其幅值误差达34.7%;图4(b)是加哈宁窗的谱分析结果,幅值误差仍高达14.5%,这说明仅仅靠加窗对这种情况仍是不够的。

本文采用的哈宁窗,其谱分析主瓣较窄,一般只有2~3点,所以将离散的功率谱加以修正,只要谱峰之间在5个频率分辨率以上,就可以得到高精度幅值。修正方法见式(9),图4(c)

是修正后的幅值谱,其误差只有0.95%。

$$\left. \begin{aligned} G_{xx}^*(n) &= G_{xx}(n-1) + G_{xx}(n) + G_{xx}(n+1) \\ n &= 1, 2, \dots, \frac{N}{2}-2 \\ G_{xx}^*(0) &= G_{xx}(0) + G_{xx}(1) \\ G_{xx}^*\left(\frac{N}{2}-1\right) &= G_{xx}\left(\frac{N}{2}-2\right) + G_{xx}\left(\frac{N}{2}-1\right) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中带*号值是修正后的功率谱。

但是若谱峰间隔小于5个分辨率时,两个峰值在修正时会互相影响而产生误差。对于谱峰很宽的系统也不能应用这种幅值修正法,不过这时即使不加幅值修正也能获得较高精度的谱分析结果。

表3是不考虑采样时间、32段折算为每段1024点谱平均的时间比较,四种进口仪器均采用硬件实现FFT及谱分析,而本文采用软件实现。考虑到进口仪器在每段分析时动态显示结果需要一定的时间,所以并不能确切的说本文的分析速度要大大高于四种进口仪器,但是本文用软件实现的谱分析速度达到了国外先进仪器用硬件实现谱分析速度的水平这一点是确定无疑的。

表3 分析速度表(不考虑采样时间)

系 统	HP5423A	CF-910	ADRE	HP3562A	CDMS-90(本文)
32段1024点谱 分析时间(s)	15	15	34	6.5	5

图5和图6及表4是HP5423A、Tmurby 1905A高级数字万用表和本文CDMS-90分析对照。对于单频率信号,相对误差小于0.5%,精度相当高。

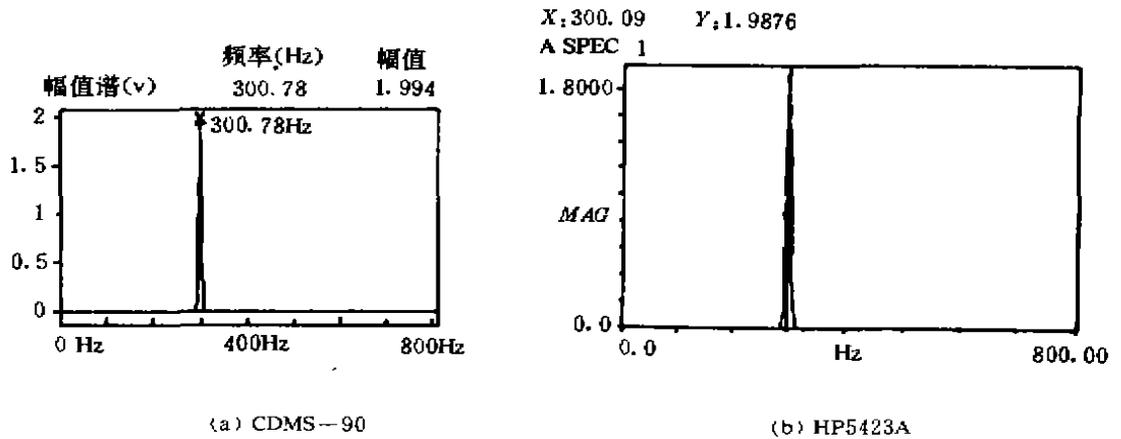


图5 300Hz、1.999V正弦信号幅值谱

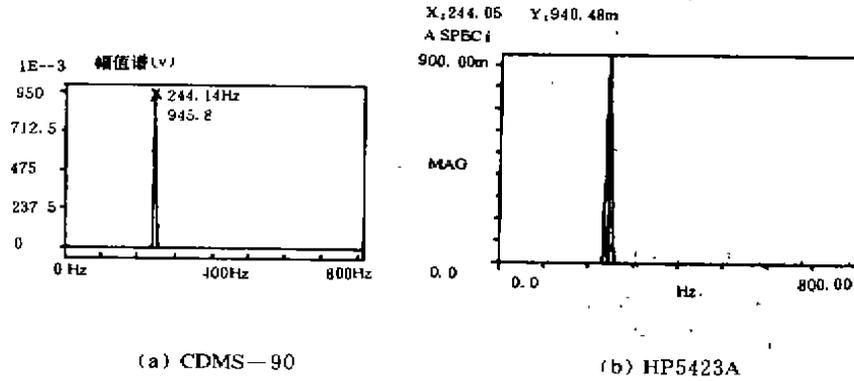


图 6 244Hz、0.974v 正弦信号幅值谱

表 4 单频率幅值对比

工 况	Tmurby 1905A 高级数字万用表	HP5423A	相对误差	CDMS-90 (本文)	相对误差
300Hz 正弦信号	1.999v	1.988v	0.55%	1.994v	0.25%
244Hz 正弦信号	0.947v	0.940v	-0.74%	0.946v	0.11%

图7、图8和表5是对两个实测振动进行频谱分析的对比。从图中可以看出两者的趋势完全一样，频率误差很小；而表中所有对应频率的幅值误差均小于1%。

表 5 频谱分析幅值对比

工 况	HP5423A		CDMS-90(本文)		相对 误差(%)	
	频率(Hz)	幅值(mv)	频率(Hz)	幅值(mv)		
某旋 转机 械轴 承座 振动	1	62.52	824.17	62.50	821.81	0.29
	2	126.43	215.58	125.00	214.62	0.44
	3	187.50	200.00	189.45	199.06	0.47
	4	253.12	187.11	251.95	186.89	0.12
	5	376.96	141.58	376.95	142.17	0.42
	6	503.12	90.71	503.91	90.87	0.18
	7	690.62	75.19	691.41	75.49	0.80
	8	565.62	69.14	566.41	69.30	0.23
某10万 千瓦发 电机组 轴承座 振动	1	49.44	437.74	49.80	436.67	0.24
	2	147.84	189.98	148.44	191.81	-0.96
	3	197.86	98.88	197.27	98.11	0.78
	4	99.33	53.78	98.63	54.03	0.41
	5	247.06	39.44	247.07	39.68	0.10

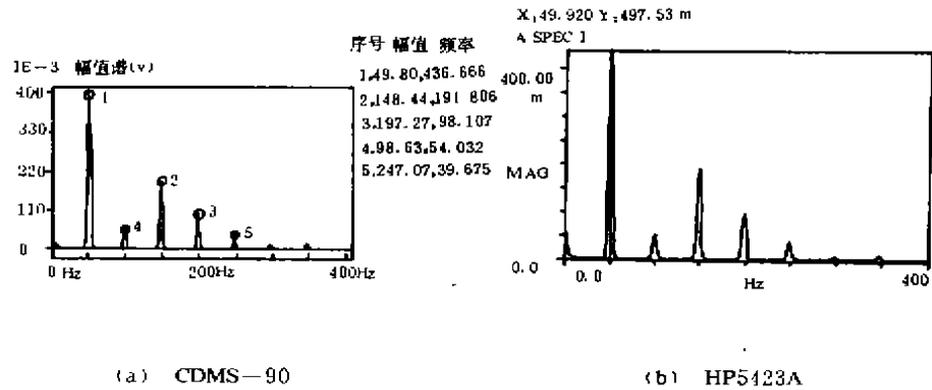


图7 某十万千瓦发电机组轴承座振动幅值谱

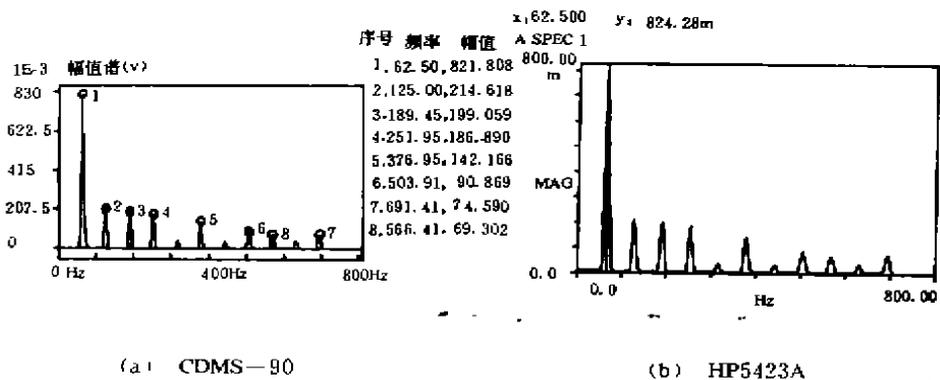


图8 某旋转机械轴承座振动幅值谱

总之,采用本文提出的方法实现的频谱分析程序具有很高的分析速度和精度。1024点复数FFT时间小于250ms,32段谱分析时间仅需5秒;不论是与实测值比较还是与HP5423A分析的结果相比较,幅值谱的相对误差均小于1%。

参 考 文 献

- 1 布赖姆, E. O. 快速富里叶变换. 上海: 上海科学技术出版社, 1984
- 2 雷继尧等. 工程信号处理技术. 重庆: 重庆大学出版社, 1990