1992年3月 第15卷第2期 | 重庆大学学报 JOURNAL OF CHONGQING UNIVERSITY | Vol. 15, №. 2 Mar. 1992

关于 C^{1-0} 泛函的极小极大原理的一个注记*

A NOTE ON THE MINIMAX PRINCIPLE FOR C^{1-0} FUNCTIONALS

张兴友
Zhang Xinyou
(重庆大学系统工程及应用数学系)

摘　要　用非光滑分析的思想，对 C^{1-0} 泛函进行了分析，得到了关于 C^{1-0} 泛函的几个极小极大定理。

关键词　形变引理；临界点；伪梯度向量场

中国图书资料分类法分类号　O177.91

ABSTRACT　Some new minmax theorems for C^{1-0} functionals are obtained with the help of the notions in nonsmooth analysis.

KEY WORDS　Deformation lemma; Critical point; Pseudo—gradient vector field

本文中恒设 X 是实 *Banach* 空间，$f \in C^{1-0}(X,R^1)$ 是 X 上的局部 *Lip* 泛函。我们采用[1]中的定义和记号，来讨论 f 的临界点理论。

设 $f \in C^{1-0}(X,R^1)$ 满足 P、S 条件，对给定的 $C \in R^1$，我们记

$$f^c = \{x \in X; f(x) \geqslant c\}, \qquad f_c = \{x \in X; f(x) \leqslant c\}$$

$$k_c = \{x \in X; \theta \in \partial f(x), f(x) = c\}$$

我们需如下引理：

引理1[1]　设 $f \in C^{1-0}(X,R^1)$ 满足 $P \not\equiv S$ 条件，则存在定义在 $B(c,\varepsilon,\delta)$ 上的局部 Lip 向量场 $v(x)$ 满足：

$$\|v(x)\| < 1$$

$$< x^*, v(x) \gg \frac{1}{2}b, \forall\, x^* \in \partial f(x)$$

这里 $\delta > 0$ 是任意正数，$B(c,\varepsilon,\delta) = f^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon] \backslash N_\delta(K_c)$，其中 $N_\delta(K_c)$ 是 K_c 的 δ 邻域，$b > 0$ 为 $\lambda(x) = \inf\limits_{x^* \in \partial f(x)} \|x^*\|$ 在 $B(c,\varepsilon,\delta)$ 上的任一个下界。

我们称这里的 $v(x)$ 为 $f \in C^{1-0}(X,R^1)$ 的伪梯度向量场。

由上述引理可得如下形变引理：

---

* 收文日期　1990-05-04

引理2 若二闭集$A \subset f^c, B \subset f_c$满足$A \cap B = \Phi$且$A \cap K_c = \Phi$，则存在$\varepsilon > 0$和到上同胚$\eta: X \to X$使得

$$① \quad f(\eta(x)) \geqslant f(x), \qquad \forall x \in X$$
$$② \quad f(\eta(x)) \geqslant c + \varepsilon, \qquad \forall x \in A$$
$$③ \quad \eta(x) = x, \qquad \forall x \in B$$

证明：由f满足$P \neq S$条件知K_c紧，而$A \cap K_c = \Phi$，所以存在$\delta_1 > 0$使$\overline{N}_{3\delta_1}(A) \cap K_c = \Phi$。又由$P \neq S$条件知存在$\varepsilon_1 > 0, \sigma_1 > 0$使

$$\inf_{\omega \in \partial f(x)} \|\omega\|_{X^*} \geqslant \sigma_1, \forall x \in \overline{N}_{3\sigma_1}(A) \cap f^{-1}[c-3\varepsilon_1, c+3\varepsilon_1].$$

可以构造$\Phi \in C^{1-0}(X,[0,1])$满足

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \forall x \in N_{\sigma_1}(A) \cap f^{-1}[C-\varepsilon_1, c+\varepsilon_1] \\ 0 & \forall x \in X \backslash (n_{2\sigma_1}(A) \cap f^{-1}[c-2\varepsilon_1, c+2\varepsilon_1]) \end{cases}$$

对$s \geqslant 0$，取$h(s) = \min(1, \frac{1}{s})$，令

$$\omega_1(x) = \begin{cases} -\delta_1\varphi(x)h(\|v(x)\|)v(x), & x \in \overline{N}_{3\sigma_1}(A) \cap f^{-1}[c-3\varepsilon_1, c+3\varepsilon_1] \\ 0, & x \in X \backslash (N_{3\delta_1}(A) \cap f^{-1}[c-3\varepsilon_1, c+3\varepsilon_1]) \end{cases}$$

其中$v(x)$是引理1中的f的伪梯度向量场。易知$\omega_1 \in C^{1-0}$且$x \in X$，$\|\omega_1(x)\| \leqslant \delta_1$，而且$\forall x \in N_{\delta_1}(A) \cap f^{-1}[c-3\varepsilon_1, c+\varepsilon_1]$和$\forall \omega \in \partial f(x)$都有

$$(\omega, \omega_1(x)) \leqslant -\frac{\delta_1\sigma_1}{2} \triangleq -\sigma < 0$$

设$\xi(t,x)$是初值问题$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \omega_1(\xi) \\ \xi(0,x) = x \end{cases}$的唯一解，则$\xi(t,x)$在整个$R^1 \times X$上有定义。令$A_1 = \{\xi(t,x): x \in A, t \in [-1,0]\}$，则$A_1$闭且$A_1 \cap B = \Phi$，$\forall x \in X$，令$\psi_1(x) = d(x,B)/[d(x,B)+d(x,A)]$，再令$B_1 = \{x \in X: \psi_1(x) \leqslant 1/2\}$，则$B_1$闭且$A_1 \cap B_1 = \varnothing$，$B \subset B_1^0$，定义

$$\widetilde{\omega}(x) = \frac{d(x,B_1)\omega_1(x)}{d(x,B_1)+d(x,A_1)}, \qquad \forall x \in X$$

则$\widetilde{\omega} \in C^{1-0}$，且$\forall x \in X$，有$\|\widetilde{\omega}(x)\| \leqslant \delta_1$，当$x \in A_1$时有$\widetilde{\omega}(x) = \omega_1(x)$；而当$x \in B_1$时$\widetilde{\omega}(x) = \theta$。

设$\bar{\xi}(t,x)$是初值问题$\begin{cases} d\bar{\xi}/dt = \widetilde{\omega}(\xi) \\ \bar{\xi}(0,x) = x \end{cases}$的唯一解，并令$(x) = \bar{\xi}(-1,x)$，$\varepsilon = \min(\sigma\min(1,\sigma_1),\varepsilon_1)$，则此$\varepsilon, \eta$即为所求。证毕。

有了引理2，不难证明下述定理：

定理1 设Q是X中闭Banach流形，具有边界∂Q，S是X中闭子集，∂Q与S环绕。$f \in C^{1-0}(X,R^1)$且$\sup_Q f < +\infty$，并且存在$\alpha \in R^1$使得

$$f(x) \leqslant \alpha, \forall x \in \partial Q; f(x) \geqslant \alpha, \forall x \in s \tag{1}$$

令$c = \inf_{\Phi \in P} \sup_{x \in Q} f(\Phi(x))$，其中$\Gamma = \{\Phi: Q \to X$连续，$\Phi|_{\partial Q} = id|_{\partial Q}\}$，则①$c \geqslant \alpha$，②$K_c \neq \Phi$，③$C = \alpha$时$K_c \cap S \neq \Phi$。

注1：定理1是[1]、[2]中相应结果的改进和推广，因为[1]中要求f在∂Q与S上的值是严格分离的，这比定理1中条件(1)强。

定理1的对偶形式为

定理2 在定理1的记号下，令

$$d = \sup_{h\in\Gamma^*} \inf_{x\in S} f(h(x))$$

其中 $\Gamma^* = \{h \in C(X,X); h$ 在上同胚且 $h|_{\partial\Omega} = id|_{\partial\Omega}\}$，则

(1) $c \geqslant d \geqslant \alpha$ (2) $K_d \neq \Phi$ (3) $d = \alpha$ 时有 $K_d \cap S \neq \Phi$.

由定理 1 和定理 2 有：

推论1 如果定理1中的条件(1)换为

$$f(x) \leqslant \alpha, \forall x \in \partial\Omega; f(x) > \alpha, \forall x \in S.$$

又设 c,d 是定理 1,2 中所定义的量，则有

$$①c \geqslant d \geqslant \alpha \quad ②K_c \neq \Phi \quad K_d \neq \Phi$$

推论2 设 Ω 是 θ 的有界开邻域，$e \in X/\Omega$，

$$\inf_{x\in\partial\Omega} f(x) \geqslant \max\{f(e), f(\theta)\}, b = \sup_{u\in\sum} \inf_{x\in\partial U} f(x),$$

这里 $\sum = \{U \subset X; U$ 开，$\theta \in U$ 且 $e \in X\backslash\bar{U}\}$，则有

①$K_b \neq \Phi$ ②$b \geqslant \max\{f(e), f(\theta)\}$ 且等号成立时有 $K_b \cap \partial\Omega \neq \Phi$.

参 考 文 献

1 Chang K C. Variational methods for non－differentiable functionalsand their applications to PDE. J Math Anal Appl, 1981,(80):102—129

2 杜一宏. 一个形变引理及其应用. 科学通报，1990,(2):96～97

3 张恭庆. 临界点理论及其应用. 上海：上海科学技术出版社，1986

4 戚桂杰. 山路引理的推广. 科学通报，1986,(31):724～727