

⑥ 24-30

一般二维场域中的 B 样条有限元法^{*}

B-SPLINE FINITE ELEMENT METHOD IN GENERAL 2-D FIELD REGIONS

李融林
Li Ronglin

江泽佳
Jiang Zejia

俞集辉
Yu Jihui

TM153.1

(重庆大学电气工程系)

摘 要 通过矩形域上的 B 样条插值函数逼近定义于该域内任意子域上的待求函数,并用广义变分原理处理第一类边界条件,本文建立了适合于一般二维区域的 B 样条有限元法。实例计算表明了该方法的优点和实用价值。

关键词 有限元;电磁场 / B 样条;广义变分

中国图书资料分类法分类号 TM153.1

ABSTRACT A B-spline finite element method for solving general 2-D electromagnetic field problems is established. The B-spline bases for a general field region are constructed using the B-spline interpolation functions defined on a rectangle which contains the region. The Dirichlet boundary condition is dealt with by means of the generalized variational principle. Two numerical examples are given that show the characteristics and practical value of the method.

KEY WORDS finite element; electromagnetic fields / B-spline; generalized variation

0 引 言

自70年代初 B 样条理论逐步完善以来, B 样条函数良好的光滑性和它特有的支集性一直受到人们广泛关注,通过运用 B 样条基,相继出现了计算梁、规则形状板结构受力的样条有限元法。1987年,文献[3]提出了用 B 样条有限元法计算电磁场问题,较之传统有限元法,其场量的计算精度显著提高,场量应有的连续性得到可靠保证。但是限于目前 B 样条基仅能在矩形域上构成,该方法只能计算矩形区域的电磁场问题。要突破这一限制,将会遇到两方面的问题:其一是在一般形状区域如何构造适合于有限元法的 B 样条基;其二是怎样处理第一类边界条件。围绕这两个问题,我们进行了较为深入的研究。本文就如何在一般二维场域形成 B 样条有限元法作一个初步的介绍。

* 收文日期 1991-05-31

高等学校博士学科点专项科研基金资助课题

1 一般二维区域上的B样条基

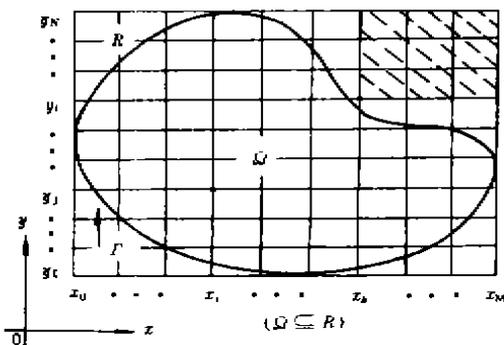


图1 一般场域的B样条剖分

设有位函数 $u \in C^1$, 它定义在边界为 Γ 的 Ω 域上, 如图1所示. 用一矩形域 R 恰好包围域 Ω , 并使矩形边界分别平行于坐标轴. 在 R 域上定义函数 U , 使

$$U = \begin{cases} u \in C^1 & \text{在 } \Omega \text{ 上} \\ u = v \in C^1 & \text{在 } \Gamma \text{ 上} \\ v \in C^1 & \text{在 } R - \Omega \text{ 上} \end{cases} \quad (1)$$

式中, v 为满足上面条件而构造的某一函数, 于是有 $U \in C^1$.

将 R 域剖分为 $M \times N$ 个矩形单元, 单元面积为

$$\Delta_{ij} = (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) \quad (i = 0, 1, \dots, M-1; j = 0, 1, \dots, N-1)$$

沿 x 方向可以构造如下二次B样条基^[1]:

$$\{B_i(x), \quad i = -2, -1, 0, \dots, M-2, M-1\} \quad (2)$$

其中

$$B_i(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_i)^2}{(x_{i+2}-x_i)(x_{i+1}-x_i)} & [x_i, x_{i+1}] \\ \frac{(x-x_i)(x_{i+2}-x)}{(x_{i+2}-x_i)(x_{i+2}-x_{i+1})} + \frac{(x_{i+1}-x)(x-x_{i+1})}{(x_{i+2}-x_{i+1})(x_{i+2}-x_{i+1})} & [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ \frac{(x_{i+2}-x)^2}{(x_{i+2}-x_{i+1})(x_{i+2}-x_{i+2})} & [x_{i+2}, x_{i+3}] \\ 0 & \text{其余区域} \end{cases}$$

以同样形式沿 y 方向也可构造二次B样条基: $\{B_j(y), j = -2, -1, 0, \dots, N-2, N-1\}$, 于是, 在矩形域 R 上可形成双二次B样条基为

$$\{B_i(x) B_j(y), \quad -2 \leq i \leq M-1, \quad -2 \leq j \leq N-1\} \quad (3)$$

函数 U 可近似表示为

$$U \approx \sum_{i=-2}^{M-1} \sum_{j=-2}^{N-1} a_{ij} B_i(x) B_j(y) \quad (4)$$

式中: a_{ij} 为与 x, y 无关的待定系数.

由(1)式, 在 Ω 域上显然有

$$u = U \approx \sum_{i=-2}^{M-1} \sum_{j=-2}^{N-1} a_{ij} B_i(x) B_j(y) \quad (5)$$

考虑到 $\Omega \subseteq R$, 上式中可能有部分 $B_i(x) B_j(y)$ 为零, 如图1中节点 (x_i, y_i) 对应的 $B_i(x) B_i(y)$. 所以, 式(5)中这些为零的 $B_i(x) B_j(y)$ 项可以去掉. 换句话说, $u \in C^1(\Omega)$ 的基函数为 $U \in C^1(R)$ 的基函数的子集, 即 $u \in C^1(\Omega)$ 的基为

$$\{B_i(x)B_j(y), -2 \leq i(i \in I) \leq M-1, -2 \leq j(j \in J) \leq N-1\} \quad (6)$$

这里 I, J 分别表示对应于在 Ω 域为零的 $B_i(x)B_j(y)$ 的 i, j 的集合。我们将上述构造一般区域上的 B 样条基的方法称作 B 样条延拓法 (B-spline Extension Method)。

为便于书写和后面的公式推导,我们仍采用式(5),并把 u 表示为

$$u \approx \sum_{i=-2}^{M-1} \sum_{j=-2}^{N-1} a_{ij} B_i(x) B_j(y) = [B_i(x)B_j(y)] \otimes [A_{ij}] \quad (7)$$

其中: \otimes 为形式积,它表示两同阶矩阵的对应元素分别相乘后所得各项再求总和, $[A_{ij}]$ 为待定系数矩阵:

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{-2,-2} & a_{-2,-1} & a_{-2,0} & \cdots & a_{-2,N-1} \\ a_{-1,-2} & a_{-1,-1} & a_{-1,0} & \cdots & a_{-1,N-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{M-1,-2} & a_{M-1,-1} & a_{M-1,0} & \cdots & a_{M-1,N-1} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$[B_i(x)B_j(y)]$ 具有和 $[A_{ij}]$ 相同的形式。

2 B 样条有限元方程

1. 设位函数 u 满足如下定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(\beta \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\beta \frac{\partial u}{\partial y}) = -f & \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g \quad (\alpha \geq 0) & \in \Gamma_1 \\ u = u_0 & \in \Gamma_2 \end{cases} \quad (9)$$

式中: $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$

对(9)式进行有限元分析时,由于(7)式表示的 B 样条插值函数的形式所限,在第一类边界上只能去逼近给定边界条件,而不能强加。为此,我们采用广义变分原理把所有边界条件吸收到变分方程中来。

依据广义变分原理^[2],与(9)式定解问题等价的广义变分问题为

$$\begin{aligned} \Pi^*(u) = & \iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \beta \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] - fu \right\} d\Omega + \int_{\Gamma_1} \beta \left(\frac{1}{2} \alpha u^2 - ug \right) d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_2} \beta \frac{\partial u}{\partial n} (u - u_0) d\Gamma = \min \end{aligned} \quad (10)$$

2. 将(7)式代表(10)式的泛函得:

$$\begin{aligned} \Pi^*(u) = & \iint_{\Omega} \frac{1}{2} \beta \{ ([B_i(x)B_j(y)] \otimes [A_{ij}])^2 + ([B_i(x)B_j(y)] \otimes [A_{ij}])^2 \} dx dy \\ & - \iint_{\Omega} ([B_i(x)B_j(y)] \otimes [A_{ij}]) f dx dy \\ & + \int_{\Gamma_1} \beta \left\{ \frac{1}{2} \alpha ([B_i(x)B_j(y)] \otimes [A_{ij}])^2 - g [B_i(x)B_j(y)] \otimes [A_{ij}] \right\} d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_2} \beta [B_i(x)B_j(y) \cos \theta + B_i(x)B_j(y) \sin \theta] \otimes [A_{ij}] \end{aligned}$$

$$\cdot ([B_i(x)B_j(y)] \odot [A_{ij}] - u_0) d\Gamma \tag{11}$$

式中, θ 为边界外法线与 x 轴正向的夹角, 如图 2 所示。

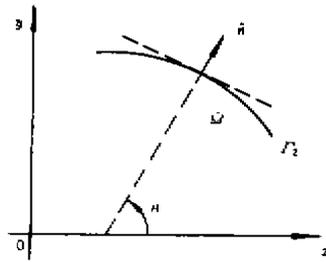


图 2 边界的外法线

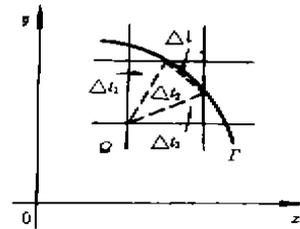


图 3 边界单元的处理

欲使泛函 Π^* 达到极值, 则(11)式中的待定系数 a_{ij} ($i = -2, -1, \dots, M-1; j = -2, -1, \dots, N-1$) 应由方程

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial a_{kl}} = 0 \quad (k = -2, -1, \dots, M-1; l = -2, -1, \dots, N-1) \tag{12}$$

来确定。

把式(11)代入式(12)得如下线性方程组

$$([C_p]_w + [C_q]_k) \odot [A_{ij}] = D_w + E_w \tag{13}$$

$(k = -2, -1, \dots, M-1; l = -2, -1, \dots, N-1)$

其中 $[C_p]_w = \iint_{\Omega} \beta \{ [B_i(x)B_j(y)] B_k(x)B_l(y) + [B_i(x)B_j(y)] B_k(x)B_l(y) \} dx dy \tag{14}$

$$[C_q]_k = \int_{\Gamma_1} \beta \alpha [B_i(x)B_j(y)] B_k(x)B_l(y) d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \beta \{ [B_i(x)B_j(y) \cos\theta + B_k(x)B_l(y) \sin\theta] B_k(x)B_l(y) + [B_i(x)B_j(y)] \cdot (B_k(x)B_l(y) \cos\theta + B_k(x)B_l(y) \sin\theta) \} d\Gamma \tag{15}$$

$$D_w = \int_{\Omega} f B_k(x)B_l(y) dx dy \tag{16}$$

$$E_w = \int_{\Gamma_2} \beta g B_k(x)B_l(y) d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \beta u_0 (B_k(x)B_l(y) \cos\theta + B_k(x)B_l(y) \sin\theta) d\Gamma \tag{17}$$

综合(13)式诸方程为矩阵形式

$$[B][A] = [P] \tag{18}$$

它即是求解(9)式定解问题的 B 样条有限元方程。其中, $[A]$ 为待定系数列矩阵

$$[A] = [a_{-2,-2}, a_{-2,-1}, \dots, a_{-2,N-1}, a_{-1,-2}, a_{-1,-1}, \dots, a_{-1,N-1}, \dots, a_{M-1,N-1}]^T \tag{19}$$

$[B]$ 为 $(M+2)(N+2)$ 阶系数矩阵, 它由(14)~(15)式确定; $[P]$ 为 $(M+2)(N+2)$ 阶列矩阵, 它由(16)~(17)式确定。

3. $[B]$ 矩阵和 $[P]$ 列阵元素的计算可按以下原则进行:

(1) 因为 B 样条基是采用分段定义的,所以在计算(14)~(17)式中的积分时,应在非零区域的每个矩形单元中分别进行。

(2) 当矩形单元内的面积分域为非规则域时,如图 3,在该域内可作三角形单元剖分,三角形单元上的面积分可采用局部坐标下的 Hammer 积公式计算。

(3) 当矩形单元内的积分包含边界时,还应作线积分(见图 3),对曲线边界可采用分段折线逼近或样条插值逼近。

(4) 以上所有积分均采用高斯数值积分计算,选用三点高斯积分即可达到较高计算精度。

4. 应当着重指出:

(1) 从式(14)和式(15)可以看出, $[B]$ 矩阵具有对称性,而且由于 B 样条的支集性质,仅当 $|i-k| < 3$ 和 $|j-l| < 3$ 时,对应的矩阵元素才可能不为零,也就是说 $[B]$ 矩阵中每行(或列)最多有 25 个非零元素。因此 $[B]$ 矩阵是一个比较规则的对称带状稀疏矩阵。

(2) 在实际求解形如(18)式的 B 样条有限元方程时,若存在 k, l , 它们满足: $k \in I$ 或 $l \in J$, (这里 I, J 与(6)式中的意义相同) 则应从 $[A]$ 中去掉相应的 $a_{k,l}$, 并同时从 $[B]$ 中划去对应于 $a_{k,l}$ 的行和列及从 $[P]$ 中去掉对应 $a_{k,l}$ 的列。

(3) 由于广义变分的引入,不仅简化了对第一类边界条件的处理,而且保证了经(2)处理后的系数矩阵 $[B]$ 的正定性。限于篇幅,此处不能给出证明过程。

(4) 由方程组(18)解出待定系数后,待求函数 u 的数值解可由下式确定:

当 $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ 和 $y_j \leq y \leq y_{j+1}$ 时

$$u(x, y) = \sum_{m=i-2}^i \sum_{n=j-2}^j a_{mn} B_m(x) B_n(y) \quad (20)$$

由于二次 B 样条 $B_m(x), B_n(y)$ 的一阶导数是连续的,所以由此求得的场量在连续介质内能够保持其固有的连续性。

3 计算实例与结果分析

1. 在直线 $y = \pm x/\sqrt{3}$ 和 $x = 3$ 所围成的等边三角形中电位 u 满足泊松方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -1 \quad (21)$$

且在边界上为零,求电位 u 及场强 E 。

这一问题的解析解^[4]为

$$u = -\frac{3}{4}(1-x/3)(y^2-x^2/3) \quad (22)$$

考虑到场分布的对称性,今取 x 轴的上半部分作为计算场域 Ω ,如图 4(a) 所示。用矩形 R 正好包围场域 Ω ,对 R 域沿 x 轴和 y 轴方向均进行 N 等分网格剖分,如图 4(b) 所示。

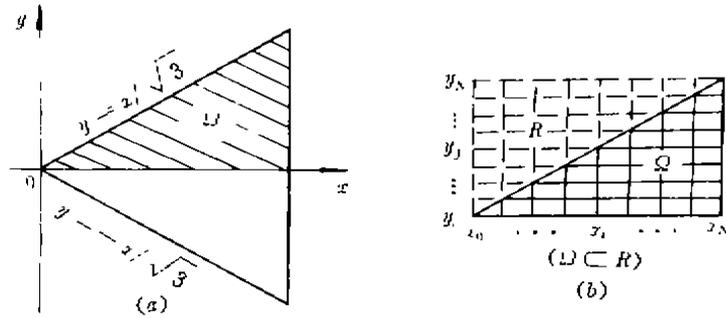


图4 二维三角形区域中的场

(a) 计算模型

(b) 计算区域的B样条剖分

用本文方法计算出电位 u , 场强 E 及其分量 E_x, E_y , 图5给出了用本文方法计算得到的总体相对误差与剖分数 N 的关系。随着剖分的加密, 数值解十分迅速地逼近精确解。场量的 x 方向分量比 y 方向分量的精度低, 这是因为场域沿 x 方向比沿 y 方向的剖分稀疏的缘故。

2. 记录磁头缝隙附近磁场的计算

由图6(a)所示的记录磁头可以看到, 磁头的长度 l , 宽度 w 和缝隙深度 d 远大于磁头的缝隙宽度 g , 因此缝隙附近的磁场可以被认为是二维平面场。选取如图6(b)所示的场域形状和边界条件来分析计算磁头缝隙附近的磁场。

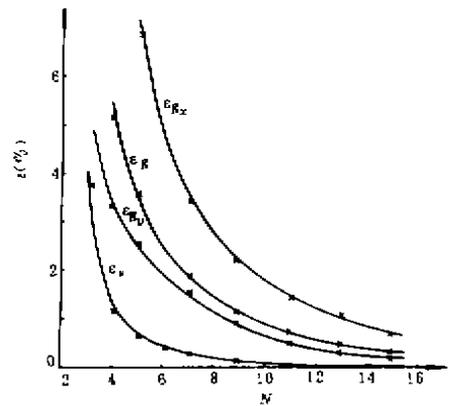


图5 总体相对误差

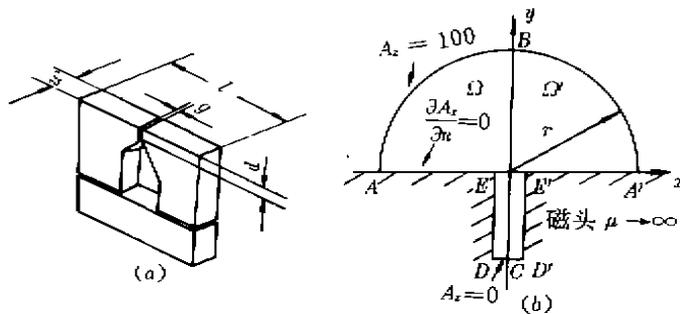


图6 记录磁头

(a) 实际模型

(b) 计算模型

考虑到分析场域的对称性, 以图6(b)中 y 轴的左半部分场域作为计算区域, 取矢量磁位 $\vec{A} = A_z \vec{k}$ 分析。

对应的边值问题为

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = 0 \quad \in \Omega \\ \frac{\partial A_z}{\partial n} = 0 \quad \in AED \cup BC \\ A_z = 100 \quad \in \widehat{AB} \\ A_z = 0 \quad \in DC \end{array} \right. \quad (23)$$

场域的几何尺寸取为: $\overline{DC} = g/2 = 1\mu\text{m}$, $\overline{DE} = 6\mu\text{m}$, $r = 8\mu\text{m}$, $\overline{EA} = r - g/2 = 7\mu\text{m}$ 。现对计算区域 Ω 作一矩形域 R 完全包围它, 对 R 域进行 8×13 非等距网格剖分, 如图 7 所示。

图 8 是按本文方法计算得到的磁头缝隙附近的磁场强度分布曲线。其中: H_0 为 C 点的磁场强度; g 为缝隙宽度。

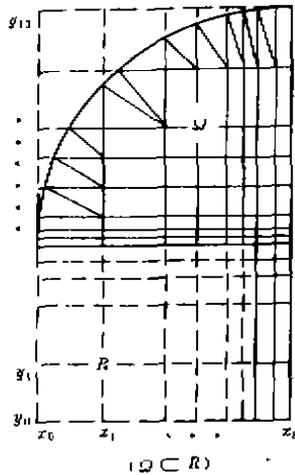


图 7 区域的 B 样条剖分

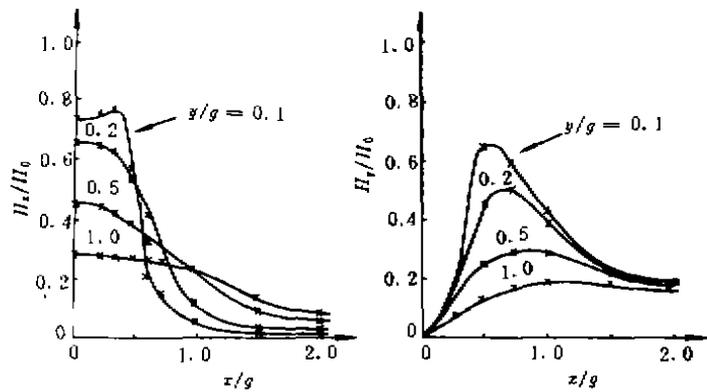


图 8 计算结果

本文的计算结果与文献[5]给出的理论分析是一致的。这说明本文方法用于场量变化比较剧烈的电磁场问题仍是十分有效的。

4 结 语

本文首次提出了用矩形域上的 B 样条插值函数去逼近定义在该域内任意子域上的待求函数这一思想, 并借助广义变分原理处理第一类边界条件, 成功地建立了一般二维区域上的 B 样条有限元法。在实例计算中, 这一方法剖分较灵活, 节点数少, 系数矩阵的特性有利于选择存储量少, 解算简便的算法。计算结果表明: 该方法具有计算精度高, 能保持场矢量应有的连续性及整体逼近性好等特点。这些都充分显示了本文提出的 B 样条有限元法的实用价值。

参 考 文 献

- 1 孙家昶, 样条函数与计算几何. 北京: 科学出版社, 1982
- 2 钱伟长, 广义变分原理. 上海: 知识出版社, 1985
- 3 梁旭彪, 简柏敦, 倪光正, B 样条有限元法. 中国电机工程学报, 1987, 7(6): 9~20
- 4 王先冲, 电磁场理论及应用. 北京: 科学出版社, 1986
- 5 松本光功(日)著, 陈贵民译, 磁记录. 北京: 科学出版社, 1983