1992年5月 重 庆 大 学 学 报 Vol. 15, №. 3
第15卷第3期 JOURNAL OF CHONGQING UNIVERSITY May. 1992

19
108-113

关于拟线性椭圆型方程在 $\overset{0}{W}{}^1_{(p_i)}(\Omega)$ 中的非平凡解*

ON THE NONTRIVIAL SOLUTIONS OF QUASILINEAR ELLIPTIC EQUATIONS IN $\overset{0}{W}{}^1_{(p_i)}(\Omega)$

O175.29

何传江
He Chuanjiang
（重庆大学系统工程及应用数学系）

摘　要　设 Ω 是 R^n 中有界区域，$p_i>1(i=1,2,\cdots,n)$，本文探求二阶拟线性椭圆边值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dx_i}F_i(x,u,Du)-F_u(x,u,Du)=0 & x\in\Omega\\ u=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

在各向异性 Sobolev 空间 $\overset{0}{W}{}^1_{(p_i)}(\Omega)$ 中有非平凡弱解的条件。应用不具"高度"的山路引理及各向异性 Sobolev 空间 $\overset{0}{W}{}^1_{(p_i)}(\Omega)$ 嵌入定理，证明了上述问题相应的弱解存在定理。

关键词　拟线性椭圆型方程 / 非平凡解；各向异性空间 $\overset{0}{W}{}^1_{(p_i)}(\Omega)$；变分法
中国图书资料分类法分类号　O 175.29

ABSTRACT　Let $\Omega\subset R^n$ be a bounded domain, $p_i>1(i=1,2,\cdots,n)$, this paper discussed the conditions of the Dirichlet problem for the quasilinear elliptic equation

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dx_i}F_i(x,u,Du)-F_u(x,u,Du)=0 & x\in\Omega\\ u=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

which possesses a nontrivial weak solution in $\overset{0}{W}{}^1_{(p_i)}(\Omega)$. Applying the mountain pass lemma without "height" and using the embedding theorem for the anisotropic Sobolev space $\overset{0}{W}{}^1_{(p_i)}(\Omega)$, it proved the existence of a nontrivial weak solution for the above problem.

KEY WORDS　quasilinear elliptic equation / nontrivial weak solution; anisotropic Sobolev space $\overset{0}{W}{}^1_{(p_i)}(\Omega)$; variational method

---

* 收文日期　1990-09-03
本文得到重庆大学青年科研基金资助

0 引　言

设 Ω 为 R^n 中的有界区域。F. Pacella 和 M. Tricarico[6] 最早在 $\overset{0}{W}{}^1_{\{2\}}(\Omega)$ 中讨论了泛函 $I(u) = \int_\Omega F(x,u,Du)\mathrm{d}x$，给出了 I 在 $\overset{0}{W}{}^1_{\{2\}}(\Omega)$ 中存在非平凡临界点的条件。我们知道，I 在 $\overset{0}{W}{}^1_{\{2\}}(\Omega)$ 中的临界点是拟线性椭圆方程边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i}F_i(x,u,Du) - F_u(x,u,Du) = 0 & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

在 $\overset{0}{W}{}_{\{2\}}(\Omega)$ 中的弱解。后来，沈尧天先生在文[5]中讨论了在稍广一些的各向同性 Sobolev 空间 $\overset{0}{W}{}^1_{\{p\}}$ 中的相应问题，得到问题(1)在 $\overset{0}{W}{}^1_{\{p\}}(\Omega)$ 中存在弱解的条件。同时，陆文端先生在文[1]中就 $F(x,u,q) = A(x,q) - G(x,u)$ 独立地探求了问题(1)在各向异性 Sobolev 空间 $\overset{0}{W}{}^1_{\{p_i\}}(\Omega)$ 中有非平凡解的条件。应用原始山路引理及他 50 年代末在苏联建立的各向异性 Sobolev 空间嵌入定理，得到问题(1)在 $\overset{0}{W}{}^1_{\{p_i\}}(\Omega)$ 中的非平凡弱解的存在性。与前述工作不同的是，本文的方法是基于文[3]中的山路引理的推广—我们形象地称之为不具"高度"山路引理，从而放宽了 $F(x,u,o)$ 在 $u=0$ 附近的限制(详见注2)。这是本文的主要工作。应该指出，侯川泽[4]也讨论了本文的问题，他的讨论基于山路引理的另一种推广(见文[7])，得到了相当一般的结果，但他对 $F(x,u,o)$ 在 $u=0$ 附近的限制较本文强(详见注2)。

1 预备及主要结果

设 Ω 是 R^n 中有界区域，$F: \bar{\Omega} \times R \times R^n \to R$。不妨设 $F(x,0,0) \equiv 0$，否则，我们可用 $F(x,u,q) - F(x,0,0)$ 代替原来的 $F(x,u,q)$。

设 $p_i > 1 (i = 1,2,\cdots,n)$，$p^* = \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\mathrm{Max}}\, p_i$，以 p_i' 表示 p_i 的共轭数，即 $\dfrac{1}{p_i} + \dfrac{1}{p_i'} = 1$。本文均用"$'$"表示共轭。命

$$s = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}, \quad g_0 = \begin{cases} n/(s-1) & \text{当 } s > 1 \\ \infty & \text{当 } s \leqslant 1 \end{cases} \tag{2}$$

本文将采用 $F_i(x,u,q)$ 表示偏导数 $\dfrac{\partial}{\partial q_i}F(x,u,q)$，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i}F_i(x,u,q)$ 表示复合偏导数。用 $\|\cdot\|$ 表空间 $\overset{0}{W}{}^1_{\{p_i\}}(\Omega)$ 的范数，$|\cdot|_p$ 表空间 $L_p(\Omega)$ 的范数。除个别地方外，本文均用同一字母 C 表不同的常数，在同一式中亦如此。

下面简要介绍各向异性 Sobolev 空间 $\overset{0}{W}{}^1_{\{p_i\}}(\Omega)$ 及其嵌入定理，详见[2]。

Ω 中有紧支集的连续可微函数集合 $C_0^1(\Omega)$ 关于范数 $\|u\| = \sum |D_i u|_{p_i}$ 的完备化记为 $\overset{0}{W}{}^1_{\{p_i\}}(\Omega)$，称为各向异性 Sobolev 空间。当 $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = p$ 时，$\overset{0}{W}{}^1_{\{p_i\}}(\Omega)$ 即为各向异性 Sobolev 空间 $\overset{0}{W}{}_{\{p\}}(\Omega)$。

定理 1 (嵌入定理)[1] 如果 $u \in \overset{0}{W}{}^1_{\{p_i\}}(\Omega)$，则对任意正数 $g < g_0$(g_0 由(2)式定义)，均有

$u \in Lg(\Omega)$，此时嵌入算子 $T:\overset{0}{W}{}^1_{p_i}(\Omega) \to Lg(\Omega)$ 是连续紧致的，且有

$$\|u\|_g \leqslant C\|u\| \tag{3}$$

推论1[1] 如果 $u \in \overset{0}{W}{}^1_{p_i}(\Omega)$，则对任意正数 $g < g_0$，成立

$$\|u\|_g \leqslant C\left(\int_\Omega \sum |D_i u|^{p_i} dx\right)^{\frac{s}{n}} \tag{4}$$

其中 s 由(2)式定义。

以上结果是陆文端先生50年代末在苏联作出的，它们及其推广均收录于[2]。

下面是对 F 的一般假设：

(F1) $F(x,u,q)$ 关于 x 可测，关于 u,q 一阶连续可微；

(F2) (结构性条件)

$$|F_i(x,u,q)| \leqslant C\sum_j |q_j|^{p_j/p_i'} + C|u|^{g/p_i'} + \varphi_i(x) \tag{5}$$

$$|F_u(x,u,q)| \leqslant C\sum_j |q_j|^{p_j/g'} + C|u|^{g-1} + \varphi(x)$$

(6) 其中常数 $C > 0$，$\varphi_i \in L_{p_i'}(\Omega)$，$\varphi(x) \in L_g'$，$g \in (1,g_0)$，$i = 1,2,\cdots,n$；

(F3) (强椭圆性条件) 对任意 $q,\bar{q} \in R^n$，$x \in \bar{\Omega}$，$u,\bar{u} \in R$

$$(F_i(x,u,q) - F_i(x,\bar{u},\bar{q}))(q_i-\bar{q}_i) \geqslant \lambda_1|q-\bar{q}|^2 \tag{7}$$

此处 $\lambda_1 > 0$ 是常数，$F_u(x,0,0) = 0$；

(F4)

$$p^*\int_0^1 F_i(x,tu,tq)q_i dt \geqslant F_i(x,u,q)q_i \tag{8}$$

且存在常数 $\mu > p^*$ 及常数 $R_1,R_2 > 0$ 使

$$\mu\int_0^1 F_u(x,tu,tq)u dt \geqslant F_u(x,u,q)u \tag{9}$$

对于 $|u| \geqslant R_1$，$|q| \geqslant R_2$ 成立；

(F5) 设 $\lim\limits_{u\to 0} - F(x,u,o)/|u|^{n/s} = a(x)$ 对 x 一致成立，且 $a(x) < \lambda_1 A_{(g)}^{-n/s}/p^*$，其中 $A_{(g)}$ 表示(4)中最优常数；

(F6) 存在凸函数 $\varphi:R \to R$，使得

$$F(x,u,q) \leqslant C_1\left(\sum_i |q_i|^{p_i} + |u|^{\mu_0}\right) - \varphi(|u|) + C \tag{10}$$

其中 $C_1 > 0$，$\mu_0 \in [p^*,g_0)$ 且 $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{\varphi(\lambda r)}{r^{\mu_0}} = +\infty$ 对 $\forall\ \lambda > 0$ 成立。

本文的主要结果是下面的

定理2 设 $F(x,u,q)$ 满足(F1)—(F6)，则问题(1)在 $\overset{0}{W}{}^1_{p_i}(\Omega)$ 中有非平凡弱解。

这个结果的证明基于：

定理3(不具"高度"山路引理)[3] 设 E 是实Banach空间，$I \in C^1(E,R)$，满足(PS)条件。$x_0,x_1 \in E$，Ω 是含 x_0 的开邻域，$x_1 \notin \bar{\Omega}$，记

$$\begin{aligned} c_1 &= \max\{I(x_0),I(x_1)\},\quad c_0 = \inf_{\partial\Omega} I(x) \\ c &= \inf_{h\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I(h(t)) \end{aligned} \tag{11}$$

此处，Γ 为连接 x_0,x_1 的连续路径之集合。如果 $c_0 \geqslant c_1$，则有 $K_c - \{x_0,x_1\} \neq \Phi$，其中 $K_c = \{x \in E | I(x) = c, I'(x) = 0\}$。

2 主要结果的证明

问题(1)对应的泛函为
$$I(u)=\int_\Omega F(x,u,Du)\mathrm{d}x \tag{12}$$
记 $E=\mathring{W}^1_{(p_i)}(\Omega)$，我们把证明分成几个引理来完成。

引理1　若 $F(x,u,q)$ 满足(F1)、(F2)，则 $I\in C^1(E,R)$，且对 $\forall\ \varphi\in E$，成立
$$I'(u)\varphi=\int_\Omega[F_i(x,u,Du)D_i\varphi+F_u(x,u,Du)\varphi]\mathrm{d}x \tag{13}$$
证明：仿文[1]引理1—2，略去。

引理2　若条件(F1)—(F4)成立，则(12)式定义的泛函 I 满足(PS)条件。

证明：　设序列 $\{u_k\}\subset E$，$|I(u_k)|\leqslant M(k=1,2,\cdots)$ 且 $I'(u_k)\to 0$，下证 $\{u_k\}$ 在 E 中有强收敛的子列。

由 $I'(u_k)\to 0$，不妨假设 $\|I'(u_k)\|\leqslant 1$，从而有
$$\|I'(u_k)\varphi\|\leqslant\|\varphi\|\qquad 对\ \forall\ \varphi\in E$$
在此式中取 $\varphi=u_k$，于是有
$$\mu I(u_k)-I'(u_k)u_k\leqslant\mu M+\|u_k\| \tag{14}$$
又
$$\begin{aligned}\mu I(u_k)-I'(u_k)u_k&=\int_\Omega[\mu F(x,u_k,Du_k)-F_i(x,u_k,Du_k)D_iu_k-F_u(x,u_k,Du_k)u_k]\mathrm{d}x\\
&\overset{(F_1)}{=}\int_\Omega\Big\{\int_0^1[\mu F_i(x,tu_k,tDu_k)D_iu_k+\mu F_u(x,tu_k,tDu_k)u_k]\mathrm{d}t\\
&\quad-F_i(x,u_k,Du_k)D_iu_k-F_u(x,u_k,Du_k)u_k\Big\}\mathrm{d}x\\
&=\frac{\mu}{p^*}\int_\Omega\Big[p^*\int_0^1F_i(x,tu_k,tDu_k)D_iu_k\mathrm{d}t-F_i(x,u_k,Du_k)D_iu_k\Big]\mathrm{d}x\\
&\quad+\Big(\frac{\mu}{p^*}-1\Big)\int_\Omega F_i(x,u_k,D_iu_k)D_iu_k\mathrm{d}x\\
&\quad+\int_\Omega\int_0^1[\mu F_u(x,tu_k,tDu_k)u_k-F_u(x,u_k,Du_k)u_k]\mathrm{d}x\\
&\overset{(F_4)}{\geqslant}\Big(\frac{\mu}{p^*}-1\Big)\int_\Omega F_i(x,u_k,Du_k)D_iu_k\mathrm{d}x\\
&\quad-\int_{(|u_k|\leqslant R_1,|Du_k|\leqslant R_2)}\Big\{\int_0^1\mu|F_u(x,tu_k,tDu_k)u_k|+|F_u(x,u_k,Du_k)u_k|\Big\}\mathrm{d}x\\
&\overset{(F_2)(F_3)}{\geqslant}\lambda_1\Big(\frac{\mu}{p^*}-1\Big)\int_\Omega\sum|D_iu_k|^{p_i}\mathrm{d}x-C\end{aligned}$$
根据(14)，我们得到
$$\mu M+\|u_k\|\geqslant\delta\sum\|D_iu_k\|_{p_i}^{p_i}-C \tag{15}$$
此处 $\delta=\lambda_1\Big(\dfrac{\mu}{p^*}-1\Big)>0$（因为 $\mu>p^*$）。由上式我们将推出 $\{u_k\}$ 在 E 中的有界性，事实上，若 $\{u_k\}$ 在 E 中无界，不妨设 $\|u_k\|\geqslant 1$，$\|u_k\|\to\infty$（这可经取子列来实现）。令
$$\|u_k\|=d_k,\ v_k=d_k^{-1}u_k,\ m=\mathop{\mathrm{Min}}_{\substack{\sum x_i=1\\ x_i\geqslant 0}}\Big(\sum x_i^{p_i}\Big)>0 \tag{16}$$
则有
$$u_k=d_kv_k,\ d_k\geqslant 1,\ d_k\to\infty,\ \sum\|D_iv_k\|_{p_i}=\|v_k\|=1 \tag{17}$$

根据(15)—(17) $\mu M + d_k \geqslant \delta \sum d_k^{p_i} \|D_i v_k\|_{p_i}^{p_i} - C \geqslant \delta d_k^{p_*} \min_{\substack{\sum x_i = 1 \\ x_i \geqslant 0}} (\sum x_i^{p_i}) - C = m\delta d_k^{p_*} - C$

其中 $p_* = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} p_i > 1$。可见上式对充分大的 d_k 是不成立的。这就证明了序列 $\{u_k\}$ 在 E 中之有界性。

设 $\|u_k\| \leqslant M(k = 1,2,\cdots)$，由定理 1 知，$\{u_k\}$ 在 $Lg(\Omega)$ 中有强收敛的子列，记为自身。又从 $I'(u_k) \to 0$ 知：对 $\forall \varphi \in E$，成立

$$\int_\Omega [F_i(x,u_k,Du_k)D_i\varphi + F_u(x,u_k,Du_k)\varphi) = o(1)\|\varphi\| \qquad (18)_k$$

让 $(18)_j - (18)_k$，并令 $\varphi = u_j - u_k$，则有

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &\stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega [F_i(x,u_j,Du_j) - F_i(x,u_k,Du_k)(D_iu_j - D_iu_k)\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_\Omega [F_u(x,u_j,Du_j) - F_u(x,u_k,Du_k)](u_j - u_k)\mathrm{d}x \\ &= o(1)\|u_j - u_k\| \end{aligned} \qquad (19)$$

根据 Holder 不等式

$$|I_2| \leqslant \int_\Omega |u_j - u_k|^g \mathrm{d}x)^{\frac{1}{g}} [(\int_\Omega |F_u(x,u_j,Du_j|^{g'}\mathrm{d}x)^{1/g'} + (\int_\Omega |F_u(x,u_k,Du_k)|^{g'}\mathrm{d}x)^{1/g'}]$$

由(F2)、定理1及 $\|u_j\| \leqslant M$，我们有

$$\int_\Omega |F_u(x,u_j,Du_j)|^{g'}\mathrm{d}x \leqslant C\int_\Omega \sum |D_iu_j|^{p_i}\mathrm{d}x + C\int_\Omega |u_j|^g\mathrm{d}x + \int_\Omega |\varphi|^{g'}\mathrm{d}x \leqslant C$$

上面最后一式用到定理1及 $\{u_k\}$ 之有界性。

注意到 $I_1 \geqslant \lambda_1\|u_j - u_k\|^2$，从(19)式得到 $\lambda_1\|u_j - u_k\|^2 \leqslant o(1)\|u_j - u_k\| + C\|u_j - u_k\|_g$ 由此知，$\|u_j - u_k\| \to 0$，这表明 $\{u_k\}$ 在 E 中有强收敛的子序列，从而 I 满足(PS)条件。

引理 3 设 $F(x,u,q)$ 满足(F_1)，(F_5)，则存在 $\rho > 0$，使 $I|_{\partial B_\rho} \geqslant 0$，此处 $B_\rho = \{u \in E \mid \|u\| \leqslant \rho\}$

证明： 根据 $\lim\limits_{u\to 0} - F(x,u,0)/|u|^{n/s} = a(x)$，对任意给定的 $u \in E, u \not\equiv 0$，成立

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} F(x,\varepsilon u,0)/\varepsilon^{n/s} = - a(x)|u|^{n/s}$$

根据 Lebesgue 控制收敛定理及定理1

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\Omega \varepsilon^{-n/s}F(x,\varepsilon_n,0)\mathrm{d}x = -\int_\Omega a(x)|u|^{n/s}\mathrm{d}x > -\int_\Omega \frac{\lambda_1}{p^*}A_{(n/s)}^{-n/s}|u|^{n/s}\mathrm{d}x$$

可见，当 $\varepsilon > 0$ 充分小时，我们有 $\int_\Omega F(x,\varepsilon u,0)\mathrm{d}x > -\int_\Omega \frac{\lambda_1}{p^*}A_{(n/s)}^{-n/s}|\varepsilon u|^{n/s}\mathrm{d}x$

因此，对充分小 $\varepsilon > 0$，

$$\begin{aligned} I(\varepsilon u) &= \int_\Omega F(x,\varepsilon u,\varepsilon Du)\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega\int_0^1 F_i(x,\varepsilon u,t\varepsilon Du)D_i(\varepsilon u)\mathrm{d}t\mathrm{d}x + \int_\Omega F(x,\varepsilon u,0)\mathrm{d}x \\ &\geqslant \lambda_1\int \sum \frac{1}{p^*}|D_i(\varepsilon u)|^{p_i} - \int \frac{\lambda_1}{p^*}A_{(n/s)}^{-n/s}|\varepsilon u|^{n/s} \\ &\geqslant \frac{\lambda_1}{p^*}\int \sum |D_i(\varepsilon u)|^{p_i}\mathrm{d}x - \frac{\lambda_1}{p^*}\int \sum |D_i(\varepsilon u)|^{p_i}\mathrm{d}x \geqslant 0 \end{aligned}$$

上面倒数第二步用到了推论 1。所以，对任意 $u \in E, u \neq 0$，令 $\|u\| = \rho > 0$，当 ρ 充分小时，

$$I(u) = I(\rho \cdot u/\|u\|) \geqslant 0$$

注1：引理3是本文最主要工作。若利用原始山路引理，需要 $I|_{\partial B_\rho} \geqslant \alpha > 0$，这就要求把条件$(F5)$加强为：存在 $\varepsilon_0 > 0$，使 $a(x) + \varepsilon_0 < \frac{\lambda_1}{p^*} A_{(n/s)}^{-n/s}$。$a(x)$，$A_{(n/s)}$ 同$(F5)$定义（详见文[4]）。

引理 4　若条件$(F6)$成立，则存在 $e \notin B_\rho$，使 $I(e) < 0$。

证明：　对 $u_0 \in E$，$\|u_0\| = 1$，因为 φ 是凸函数，所以 $\int_\Omega \varphi(|u|)\mathrm{d}x \geqslant \varphi\left(\int_\Omega |u|)\mathrm{d}x\right)$

对于任意参数 $\lambda > 0$，我们有

$$
\begin{aligned}
I(\lambda u_0) &= \int_\Omega F(x, \lambda u_0, \lambda D u_0)\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_\Omega (C \sum \lambda^{p_i} |D_i u_0|^{p_i} + \lambda^{\mu_0} |u_0|^{\mu_0}) - \int_\Omega \varphi(\lambda |u_0|) + C \\
&= \lambda^{\mu_0} \{ C \sum \lambda^{p_i - \mu_0} \int_\Omega |D_i u_0|^{p_i} \mathrm{d}x + \int_\Omega |u_0|^{\mu_0} \mathrm{d}x - \lambda^{-\mu_0} \varphi\left(\lambda \int_\Omega |u_0| \mathrm{d}x \right) \} + C \\
&\leqslant \lambda^{\mu_0} [C \lambda^{p^* - \mu_0} + \int_\Omega |u_0|^{\mu_0} \mathrm{d}x - \lambda^{-\mu_0} \varphi\left(\lambda \int |u_0| \right) \mathrm{d}x] + C
\end{aligned}
$$

注意到 $\mu_0 \geqslant p^*$ 及 $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \varphi(\lambda \int |u_0| \lambda^{-\mu_0}) = +\infty$，对 $\forall\ \lambda > 0$。从而可知，$\lim\limits_{\lambda \to \infty} I(\lambda u_0) = -\infty$，故可取 $e = R u_0$，$R > 0$ 充分大。

定理 2 的证明：注意到 $I(0) = 0$，引理 1—4 表明 I 满足定理 3 的全部条件，定理 2 获证。

注 2：(1) 陆文端先生在文[1]中讨论了特殊情形 $F(x, u, q) = A(x, q) - G(x, u)$，不难验证 A、G 满足[1]中条件时，F 满足本文的条件。

(2) 文[1]对 $G(x, u)$ 的第 3 条假设为

$(g3)$　在 $u = 0$ 处，$g(x, u) = o(|u|^{n/s-1})$ 对 x 一致成立。应用本文结果，此条件可减弱为

$(g3)$　$\lim\limits_{u \to 0} g(x, u)/|u|^{n/s-1} = a(x)$ 关于 x 一致成立　且

$$
a(x) < \frac{n}{s} \cdot \frac{\lambda_1}{p^*} A_{(n/s)}^{-n/s} \qquad \text{（由}(F5)\text{推出）}
$$

若应用文[4]，$(g3)$ 只能减弱为

$(g3)''$　$\lim\limits_{u \to 0} g(x, u)/|u|^{n/s-1} = a(x)$ 关于 x 一致成立，且存在 $\varepsilon_0 > 0$，使 $a(x) + \varepsilon_0 < \frac{n}{s} \cdot \frac{\lambda_1}{p^*} A_{(n/s)}^{-n/s}$。

参 考 文 献

1　陆文端. 一类二阶拟线性椭圆方程的 Dirichlet 问题，四川大学学报，1986，(1)：28～39

2　陆文端. 偏微分方程中的变分方法，四川大学数学系，1987

3　戚桂杰. 山路引理的推广. 科学通报，1986，A(10)：724～726

4　侯川泽. 泛函 $I(u) = \int_\Omega F(x, u, Du)\mathrm{d}x$ 在各向异性 Soolev 空间中的临界点存在性，四川大学学报，1988，(2)：236～238

5　Shen yao-tian, The nontririal solutions of quasilinear elliptic equation in $\overset{0}{W}{}^1_{(p)}(\Omega)$. Sienta sinica (Series A). 1984, (27): 720～730

6　Pacalla F. Tricarico M. On the existence of infinitely many critical points of the functional $\int_\Omega F(x, u, Du)\mathrm{d}x$. Richerche Di. Matematica, 1982, (31): 295～320

7　Bartolo P, Benci V. Fortunato D. Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with "strong" resonance. Nonlinear Analysis, T. M. A. 1983, 7(9): 981～1012