

16

岩石三点弯曲圆梁试样的突变分析

93-99

A CATASTROPHE ANALYSIS OF THREE-POINT BEND ROUND BEAM SPECIMENS OF ROCK

TU452

王启智 鲜学福
Wang Qizhi Xian Xuefu
(重庆大学 资源及环境工程系)

摘要 分析了岩石、混凝土和陶瓷等一类材料的三点弯曲圆梁在断裂测试中可能出现的“回跳”失稳行为,即一种突变现象。对这种试样提出了一个不同于三点弯曲矩形截面梁的失稳条件。

关键词 岩石断裂力学;三点弯曲圆梁;内聚裂纹模型;“回跳”失稳;突变

中国图书资料分类法分类号 O346.5

ABSTRACT The snap-back instability (also known as catastrophe behavior), which may happen during the process of fracture testing with three-point bend round beam of rock, concrete and ceramic materials is analysed, an instability criterion for this kind of specimen is proposed, it is different from that of the three-point bend rectangular beam.

KEY WORDS rock fracture mechanics; three-point bend round beam; cohesive crack model; snap-back instability; catastrophe

0 引言

突变(catastrophe)是系统对外部条件的平滑变化而作出的突然响应。牛顿的理论仅考虑光滑、连续的过程,而突变理论提供了一种研究跃迁、不连续性和突然质变的普遍适用的方法^[1]。突变理论是研究不连续现象的一个新兴数学分支,它是由比利时数学家 Thom 在70年代创立的,十多年来,突变理论有了很大的发展,在数学、力学、物理学、生物学和社会科学中,借助突变理论不仅能加深对已有规律的认识,还可以得到一些新的结果^[2]。最近, Potier-Ferry 用突变理论给出了线弹性断裂力学失稳性的一种解释^[3], Carpinteri 根据 Thom 理论的基本概念分析了弹性-软化材料在断裂测试中的失稳现象^[4,5]。对岩石、混凝土和陶瓷等一类具有软化性质的材料,其试样断裂测试所记录的载荷-位移曲线会出现一种失稳现象:控制变量(例如位移)的平滑变化会导致行为变量(例如载荷)的不连续改变,即一种突跳。Carpinteri 的方法对分析这种断裂试样的不稳定现象是有效的,而且比较直观、简单。Carpinteri 分析的三点弯曲梁具有矩形的截面(以下简称方梁)但是在岩石力学界,圆柱形的试样更

* 收文日期 1991-01-09

容易获得且应用广泛,本文用类似的方法分析了具有圆形截面的3点弯曲圆梁(以下简称圆梁)的失稳条件,结果表明圆梁比方梁不容易发生“回跳”失稳。

1 失稳分析

1.1 完整无损圆梁的线弹性弯曲(阶段1)

图1所示的是没有任何裂纹和损伤的圆梁,如果材料的行为是线弹性的,则其中心的挠度 δ_1 是

$$\delta_1 = \frac{4P_1 l^3}{3\pi E D^3} \quad (1)$$

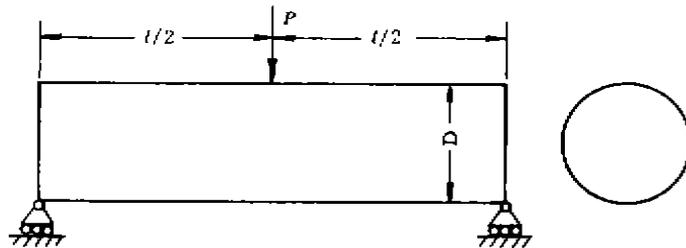


图1 完整无损的三点弯曲圆梁

其中, E 是弹性模量, P_1 是载荷, l 是跨度, D 是直径。下标1代表阶段1。

(1)式可以改写成如下无量纲形式

$$\bar{P}_1 = \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{1}{\lambda^3} \cdot \bar{\delta}_1 \quad (2)$$

其中, $\lambda = \frac{l}{D}$ 代表试样的细长程度,无量纲载荷 \bar{P}_1 和无量纲中心挠度 $\bar{\delta}_1$ 分别由以下两式给出

$$\bar{P}_1 = \frac{P_1 l}{\sigma_s D^3} \quad (3)$$

$$\bar{\delta}_1 = \frac{\delta_1 l}{\epsilon_s D^2} \quad (4)$$

其中 σ_s 和 ϵ_s 分别是材料的极限位伸应力和应变。

一旦圆梁的跨度中心横截面的最下端达到 σ_s , 断裂过程就开始了,这被认为是完整无损圆梁的极限情况,从材料力学应力公式以及(3)式容易算出无量纲极限载荷是 $\bar{P}_0 = \frac{\pi}{8}$ 。因此,对图1描述的阶段1,我们必须有

$$\bar{P}_1 \leq \frac{\pi}{8} \quad (5)$$

利用(2)式和(5)式可知,对于无量纲中心挠度的限制是

$$\bar{\delta}_1 \leq \frac{\lambda^3}{6} \quad (6)$$

因此 $\bar{\delta}_1$ 的极限值是 $\bar{\delta}_0 = \frac{\lambda^3}{6}$ 。

(5)式和(6)式是(2)式的应用条件,(2)式表明了阶段1圆梁 \bar{P}_1 和 $\bar{\delta}_1$ 之间的线弹性关系。

1.2 具有断裂过程区圆梁的弹塑性弯曲(阶段2)

在裂纹从圆梁的中心横截面的最下端发生后,裂纹就开始扩展。但是,对于岩石、混凝土和陶瓷等材料,它们在加载的最后阶段具有软化的行为,在裂纹前端形成一个很长的断裂过程区,在此区中可以假定一个线性的应力-裂纹张开位移模型^[1,5],这个内聚裂纹模型认为:断裂过程区中相互联系的两个裂面虽有部份的损伤甚至分离,但仍然能够传递应力,此应力决定于分开它们的距离 w ,距离增加,内聚应力便线性地减小;当 $w \geq w_c$ 时,此应力为0,裂面成为自由表面; w_c 代表属于材料的一种临界值。图2说明了这种阶段2的圆梁,其中断裂过程区已延伸到了中心横截面的最上端。

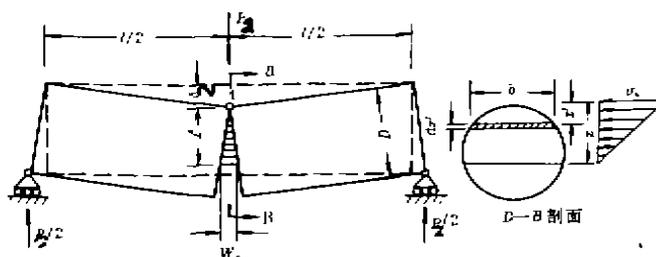


图2 具有断裂过程区的三点弯曲圆梁

在图2中, x 代表线性分布的内聚应力的作用范围,即断裂过程区的长度。从几何分析容易得到

$$\frac{\delta_2}{l/2} = \frac{w_c/2}{x} \quad (7)$$

由(7)式和(4)式(注:对阶段2,应将(3)、(4)两式中的下标改为2)得到

$$x = \frac{w_c l}{4\delta_2} = \frac{w_c l^2}{4\varepsilon_s \delta_2 D^2} \quad (8)$$

但是我们必须有

$$x \leq D \quad (9)$$

由(8)(9)两式得到阶段2的无量纲中心挠度 $\bar{\delta}_2$ 的范围是

$$\bar{\delta}_2 \geq \frac{S_s \lambda^2}{2\varepsilon_s} \quad (10)$$

其中, $S_s = \frac{w_c}{2D}$, S_s 是代表脆性的一个无量纲量, $\lambda = l/D$ 。显然, $\bar{\delta}_2$ 的极限值是 $\bar{\delta}_{2s} = \frac{S_s \lambda^2}{2\varepsilon_s}$ 。

图2的载荷 P_2 可以通过半个试样绕A点的转动平衡关系求得。在半个试样上作用有呈线性分布的内聚应力和支座反力 $\frac{P_2}{2}$ 。方梁的力矩平衡关系是简单的^[1],但是对于本文所讨论的圆梁,力矩计算却比较复杂,难点在于求内聚应力的力矩时要用微面积进行积分,而此微面积的长度 b 是变化的(见图2), b 由下式给出

$$b = 2 \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{D}{2}\right)^2} \quad (11)$$

其中 x 表示微面积的位置。

内聚应力产生的绕A点转动的力矩是

$$M_c = \int_0^x \frac{x-x'}{x} \cdot \sigma_s \cdot x' \cdot 2 \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left(x' - \frac{D}{2}\right)^2} dx' \quad (12)$$

其中 x 是断裂过程区的长度。

经过比较复杂的积分(附录 A), 我们得到

$$\begin{aligned} M_c = 2\sigma_s \left\{ \left[-\frac{x^2}{4} + \frac{5xD}{8} - \frac{13D^2}{32} + \frac{5D^3}{64x} \right] \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{D}{2}\right)^2} \right. \\ \left. + \left[\frac{D^3}{16} - \frac{5D^4}{128x} \right] \left[\arcsin \left[\frac{x - \frac{D}{2}}{\frac{D}{2}} \right] + \frac{\pi}{2} \right] \right. \\ \left. - \frac{1}{3} \left[1 - \frac{D}{x} \right] \left[\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{D}{2}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \right\} \quad (13) \end{aligned}$$

支座反力绕 A 点的力矩是

$$M_s = \frac{P_2 l}{4} \quad (14)$$

力矩平衡条件要求

$$M_c = M_s \quad (15)$$

注意 P_2 的无量纲化与阶段 1 相同(即(3)式), 再利用(13)、(14)和(15)式我们得到无量纲载荷 \bar{P}_2 和 x 的关系如下

$$\bar{P}_2 = \frac{8}{D^3} \left\{ \quad \right\} \quad (16)$$

其中大括号中的内容与(13)式中的完全一样, 故省略。利用(16)式和(8)式就可以得到 $\bar{P}_2 - \bar{\delta}_2$ 的关系式, 这是一种复杂的非线性关系, 与(2)式有很大的区别。将 $x=D$ 代入(16)式就得到 \bar{P}_2 的极限值是 $\bar{P}_{2L} = \frac{3\pi}{16}$, 此值就是阶段 2 的最大无量纲载荷, 因此总有

$$\bar{P}_2 \leq \frac{3\pi}{16} \quad (17)$$

注意阶段 2 的极限载荷与阶段 1 的是不同的, 而在文献[4]中对方梁证明了两个阶段的极限载荷是相等的(都等于 $\frac{2}{3}$)。

Carpinteri 给出的方梁的载荷—位移(中心挠度)关系如图 3⁽⁴⁾所示, 分成两种情况, 即(a) $\bar{\delta}_{2L} > \bar{\delta}_{1L}$, 两个阶段的 $\bar{P}-\bar{\delta}$ 曲线是分开的, 它们可以用一条光滑的曲线(图中虚线)连接, 则试样的行为是稳定的。(b) $\bar{\delta}_{2L} \leq \bar{\delta}_{1L}$, 两个阶段的 $\bar{P}-\bar{\delta}$ 曲线是互相重叠的, 它们不能用一条光滑的过渡曲线连接。如果用图中的虚线连接, 这表明位移 $\bar{\delta}$ 会出现“回跳”, 这在控制位移 $\bar{\delta}$ 的加载方式(按恒定的速率 $\dot{\delta}$ 控制)中是实现不了的。结果单调均匀增加的位移却导致载荷的不连续改变, 如图 3(b)所示, 从 a 点突然跳到 b 点, 这就是一种突变跳跃, 换言之就是失稳。

圆梁的载荷—位移曲线与方梁的有很大的不同, 特别表现在圆梁阶段 2 的极限载荷大于阶段 1 的极限载荷上。如果仍然像方梁那样用 $\bar{\delta}_{2L} \leq \bar{\delta}_{1L}$ 来判断失稳则不合理, 因为这个准则所比较的极限位移应在相同的载荷水平下进行。事实上, $\bar{P}_{2L} > \bar{P}_{1L}$, 圆梁的断裂过程区不能达到那样长, 在此以前, 裂纹已从中心横截面的最下端处开始扩展, 当断裂过程区长度等于 $0.8D$

当 $\left\{ \frac{x}{D} = 0.8 \right\}$ 时,其对应的无量纲载荷才等于 \bar{P}_2 (即 $\frac{\pi}{8}$ 或 0.39),这可以用从(16)式算出的表1看出。

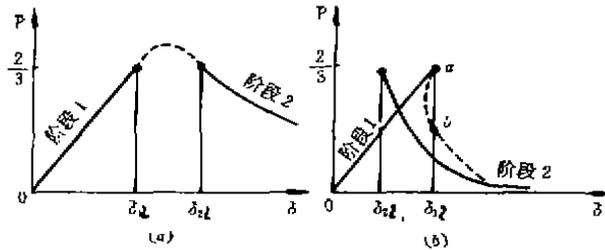


图3 方梁的载荷—位移图

表1 断裂过程区长度 (x/D) 与无量纲载荷 (\bar{P}_2) 的关系

x/D	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
\bar{P}_2	0.003	0.015	0.04	0.08	0.14	0.21	0.29	0.39	0.49	0.59

取 $\frac{x}{D} = 0.8$ 可以求出对应的无量纲位移 $\bar{\delta}_{21}$,如图4所示,因此圆梁出现“回跳”失稳的条件是 $\bar{\delta}_{21} \leq \bar{\delta}_{12}$ 。

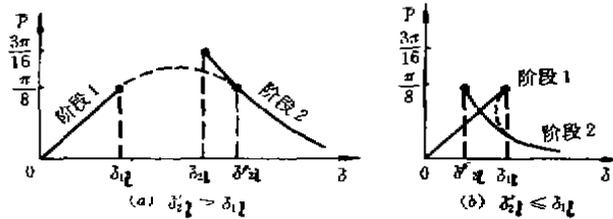


图4 圆梁的载荷—位移图

将 $\frac{x}{D} = 0.8$ 代入(8)式,并利用 $S_E = \frac{m_c}{2D}$ 和 $\lambda = \frac{l}{D}$,可以求出

$$\bar{\delta}_{21} = \frac{5S_E \lambda^2}{8e_s} \tag{18}$$

又从(16)式可知 $\bar{\delta}_{12} = \frac{\lambda^3}{6}$,因此圆梁的失稳条件是

$$\frac{5S_E \lambda^2}{8e_s} \leq \frac{\lambda^3}{6} \tag{19}$$

即

$$\frac{S_E}{e_s \lambda} \leq \frac{4}{15} = 0.27 \tag{20}$$

为了便于比较,将方梁的失稳条件列在下面⁽¹⁾

$$\frac{S_E}{e_s \lambda} \leq \frac{1}{3} = 0.33 \tag{21}$$

比较(20)和(21)式可知圆梁比方梁稳定。

2 结论和讨论

1) 岩石3点弯曲圆梁的形变和断裂进程可以分为两个阶段,阶段1是线弹性的(图1),其载荷—位移(中心挠度)的关系如(2)式;阶段2是弹塑性的(图2),其载荷—位移关系由(16)式与(8)式确定。本文的分析表明,当采取位移控制时,在一定的条件下,控制变量(位移)的连续变化会导致行为变量(载荷)的不连续改变,即一种突变(图4(b))。

2) 对于岩石、混凝土和陶瓷等一类材料,在阶段2可以用内聚裂纹模型^[5]来描述断裂过程区中的应力和裂纹张开位移之间的关系。在裂纹前端存在的呈线性分布的闭合应力代表了塑性、空穴、桥连等所有非线性行为对断裂进程的影响。利用这一模型得到圆梁在阶段2的载荷—位移关系是比较复杂的,且其两个阶段的极限载荷不相等,这些性质与方梁是很不相同的。

3) 当圆梁的尺寸比例,例如 $\lambda \left(= \frac{l}{D} \right)$, 或 $s_k \left(= \frac{m}{2D} \right)$ 大于某一个临界值(参考(20)式)时会发生“回跳”失稳,此时试样的断裂过程区将来不及生成或完全生成,阶段2将残缺较大的部分,如图4(b)中的连接虚线所示,因而缓慢稳定的裂纹扩展也不可能发生。又由(20)式可知,当 λ 一定时, D 越大越易失稳;当 D 一定时, λ 越大(试样越细长)越易失稳;当然材料通过 m 和 e 对稳定性也有影响。比较(20)式和(21)式可知方梁比圆梁容易失稳。由此可见,试样所表现的稳定性方面的行为,不仅取决于材料的性质,也取决于试样的几何形状、尺寸,加载条件和外部约束等多方面的因素。

4) 文献[4—6]对方梁突变分析的结论(转引在本文的图3和(21)式)已用有限元和实验方法加以证实。本文对圆梁突变分析的结论(图4(20)式)也应该用类似的方法加以验证,这是进一步的工作。

参 考 文 献

- 1 Arnold V I. Catastrophe Theory, 中译本,周燕华译,突变理论,北京:高等教育出版社,1990
- 2 Saunders P T. An Introduction to Catastrophe Theory, Cambridge University Press, 1980, 中译本,凌复华译,灾变理论入门,上海:上海科技文献出版社,1983
- 3 Poter—Ferry M. Towards a Catastrophe Theory for the Mechanics of Plasticity and Fracture, Int. J. Engng. Science, 1985, 23: 821—837
- 4 Caprineri A. Size Effect on Strength, Toughness and Ductility, J. Engng. Mechanics, 1989, 115: 1375—1391
- 5 Caprineri A. A Catastrophe Theory Approach to Fracture Mechanics, Int. J. Fracture, 1990, 44: 57—69
- 6 Bocca P. and Carpineri A. Snap—back Fracture Instability in Rock Specimens, Experimental Detection Through a Negative Impulse, Engng. Fracture Mechanics, 1990, 35: 241—250

附录 A—关于内聚应力之力矩 M_c 的计算

在正文中我们已经得到

$$M_c = \int_0^x \frac{x-x'}{x} \cdot \sigma_c \cdot x' \cdot 2 \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left(x' - \frac{D}{2}\right)^2} dx' \quad (12)$$

令 $y = x' - \frac{D}{2}$, 将(12)式改写成

$$M_c = 2\sigma_c \int_{-\frac{D}{2}}^{x-\frac{D}{2}} \left[\left(\frac{D}{2} - \frac{(D/2)^2}{x}\right) + \left(1 - \frac{D}{x}\right)y - \frac{y^2}{x} \right] \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - y^2} dy \quad (a)$$

先计算以下三个积分:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{D}{2}}^{x-\frac{D}{2}} \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - y^2} dy &= \frac{x - \frac{D}{2}}{2} \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{D}{2}\right)^2} \\ &\quad + \frac{\left(\frac{D}{2}\right)^2}{2} \arcsin \frac{x - \frac{D}{2}}{\frac{D}{2}} + \frac{\left(\frac{D}{2}\right)^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (b)$$

$$\int_{-\frac{D}{2}}^{x-\frac{D}{2}} y \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - y^2} dy = -\frac{1}{3} \left[\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{D}{2}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \quad (c)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{D}{2}}^{x-\frac{D}{2}} y^2 \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - y^2} dy &= \frac{x - \frac{D}{2}}{8} \left[2 \left(x - \frac{D}{2}\right)^2 - \left(\frac{D}{2}\right)^2 \right] \\ &\quad \times \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{D}{2}\right)^2} \\ &\quad + \frac{\left(\frac{D}{2}\right)^4}{8} \cdot \arcsin \frac{x - \frac{D}{2}}{\frac{D}{2}} + \frac{\left(\frac{D}{2}\right)^4}{8} \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (d)$$

将(b)(c)(d)三式代入(a)式便得到正文中的(13)式,即

$$\begin{aligned} M_c &= 2\sigma_c \left\{ \left[-\frac{x^2}{4} + \frac{5xD}{8} - \frac{13D^2}{32} + \frac{5D^3}{64x} \right] \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{D}{2}\right)^2} \right. \\ &\quad + \left[\frac{D^3}{16} - \frac{5D^4}{128x} \right] \left[\arcsin \left[\frac{x - \frac{D}{2}}{\frac{D}{2}} \right] + \frac{\pi}{2} \right] \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} \left[1 - \frac{D}{x} \right] \left[\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{D}{2}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \right\} \end{aligned} \quad (13)$$