(21)
122-125

不具"高度"山路引理对半线性椭圆型方程的应用*

THE APPLICATION OF MOUNTAIN PASS LEMMA WITHOUT "HEIGHT" TO SEMILINEAR ELLIPTIC EQUATIONS

何传江 O175.29
He Chuanjiang
(重庆大学系统工程及应用数学系)

摘 要 给出了不具"高度"山路引理在半线性椭圆方程 $-\triangle u=f(x,u),x\in\Omega,u=0,x\in\partial\Omega$ 中的应用，放宽了 $f(x,u)$ 在 $u\equiv0$ 附近性态的限制。

关键词 变分法；半线性椭圆方程 / 不具"高度"山路引理
中国图书资料分类法分类号 O175.29

ABSTRACT An application of Mounntain Pass Lemma without "height" to semilinear elliptic equation $-\triangle u=f(x,u)$ in Ω, and $u=0$, on $\partial\Omega$ is presented, and the restriction on $f(x,u)$ at $u\equiv 0$ is relaxed with the result of the study.

KEY WORDS variational method; semilinear elliptic equation / Mountain Pass Lemma without "height".

山路引理自 A. Ambrosetti 和 P. H. Rabinowitz[1] 1973年提出以来，已有各种形式的推广[2]。每种推广应用于半线性椭圆方程，均得到新结果。本文将文[3]的推广（我们把它称为不具"高度"山路引理）应用于半线性椭圆方程，所得结果削弱了文献中关于这类方程非线性项在零点附近性态的限制。

文[3]中得出山路引理的如下推广：

定理1 设 E 是实 Banach 空间，$I\in C^1(E,R)$，满足(PS)条件，$x_0,x_1\in E$，Ω 是含 x_0 的开邻域，$x_1\notin\overline{\Omega}$，

记
$$c_1=\max\{I(x_0),I(x_1)\},\quad c_0=\inf_{\partial\Omega}I(x)$$
$$c=\inf_{h\in\Phi}\max_{t\in[0,1]}I(h(t))$$

其中 Φ 是连接 x_0,x_1 两点的连续路径的集合。若 $c_0\geq c$，则有 $K_c-\{x_0,x_1\}\neq\Phi$，此处 $K_c=\{x\in E\,|\,I(x)=c,I'(x)=0\}$

注2 该定理是文[4]中得到的山路引理推广的进一步推广。

* 修改稿收到日期 1991-11-18
本文得到重庆大学青年基金资助。

下面给出定理 1 的应用。

考虑半线性椭圆方程 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\triangle u = f(x,u) & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

其中 Ω 是 R^n 中光滑有界区域。因 $n = 2, n \geqslant 3$ 时，两种情形的讨论类似，本文只讨论 $n \geqslant 3$ 的情形。

对函数 $f(x,u)$ 作如下的假设：

($f1$)　$f \in C^{\alpha}_{loc}(\overline{\Omega} \times R)$ 且 $f(x,0) = 0$

($f2$)　存在常数 c_1, c_2 使

$$|f(x,u)| \leqslant c_1 + c_2|u|^p, \quad 1 < p < \frac{n+2}{n-2}$$

($f3$)　$\lim\limits_{u\to 0} f(x,u)/|u| = a(x) < \lambda_1$，关于 $x \in \overline{\Omega}$ 一致成立。λ_1 为 $-\triangle: H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ 的第一特征值，且 $a(x) \in L^\infty(\Omega)$.

($f4$)　$\lim\limits_{u\to\infty} f(x,u)/u = \infty$ 对 $x \in \overline{\Omega}$ 一致成立。

($f5$)　存在常数 c_3，使

$$\int_0^u f(x,t)\mathrm{d}t \equiv F(x,u) \leqslant \theta f(x,u)u, \ |u| \geqslant c_3, \theta \in [0,1/2) \tag{4}$$

本文的主要结果为：

定理 2　假设($f1$)—($f5$) 成立，则问题(3) 至少有一非平凡古典解。

注 2　(1) 在文献中[1,2]，类似于假设($f3$) 的条件为 $\lim\limits_{u\to 0} f(x,u)/|u| = 0$，应用原始山路引理，这个条件可以减削为 $\lim\limits_{u\to 0} f(x,u)/|u| \leqslant \lambda_0 < \lambda_1, \lambda_0 > 0$ 是某常数，但不能更进一步减削成假设($f3$)。

(2)　根据一致椭圆方程 L^p 估计、Schauder 估计及 Sobolev 嵌入定理，解的正则性讨论是标准的，因此，我们只需证明(3) 在 $H_0^1(\Omega)$ 至少有一非平凡解。

定理 2 的证明　方程(3) 对应的变分泛函为

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x - \int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x, \qquad u \in H_0^1(\Omega) \tag{5}$$

由标准证明可知，$I \in C^1(H_0^1(\Omega), R)$ 且 I 的临界点是(3) 的 $H_0^1(\Omega)$— 解。

根据假设($f3$)，不难知

$$\lim_{z\to 0} F(x,z)/z^2 = \frac{1}{2}a(x) \qquad \text{关于 } x \in \overline{\Omega} \text{ 一致成立。}$$

从而，对任意 $u \in H_0^1(\Omega), u \not\equiv 0$，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \varepsilon^{-2}F(x,\varepsilon u)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)u^2\mathrm{d}x < \frac{1}{2}\lambda_1\int_\Omega u^2\mathrm{d}x$$

因此，对充分小的 $\varepsilon>0$

$$\int_\Omega F(x,\varepsilon u)\mathrm{d}x < \frac{1}{2}\lambda_1\int_\Omega (\varepsilon u)^2\mathrm{d}x \tag{6}$$

从而，对充分小的 $\varepsilon>0$

$$I(\varepsilon u) = \frac{1}{2}\varepsilon^2\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x - \int_\Omega F(x,\varepsilon u)\mathrm{d}x$$

$$> \frac{1}{2}\varepsilon^2\int_{\Omega}(|\nabla u|^2 - \lambda_1 u^2)\mathrm{d}x$$
$$\geq 0$$

可见，对任意 $u \in H_0^1(\Omega)$，$u \neq 0$，存在充分小 $\delta > 0$，当 $\|u\| = \delta$ 时，$I(u) = I\left(\|u\| \cdot \frac{u}{\|u\|}\right) > 0$。并注意到 $I(0) = 0$。

又因为 $\lim\limits_{z\to\infty} f(x,z)/z = \infty$，对任意常数 $C > 0$，存在常数 $M = M(C) > 0$，使

$$f(x,z) \geq Cz, \qquad z \geq M$$

任取 $u \in H_0^1(\Omega)$，$\|u\| = 1$，$u > 0$。对常数 $R > 0$，

$$I(Ru) = \frac{1}{2}R^2 - \int_{\Omega} F(x, Ru)\mathrm{d}x$$
$$\leq \frac{1}{2}R^2 - \int_{[u > M/R]} \frac{1}{2}CR^2u^2 - C_1, \quad (C_1 \text{为某常数})$$

又，当 $R > 0$ 充分大时，

$$\int_{[u > M/R]} u^2\mathrm{d}x \geq \frac{1}{2}\int_{\Omega} u^2\mathrm{d}x$$

特别取 $C = 4\left(\int_{\Omega} u^2\mathrm{d}x\right)^{-1}$，则由(7)知 $I(Ru) \leq -\frac{1}{2}R^2 - C_1$，从而存在 u_1，$\|u_1\| > \delta$，使 $I(u_1) < 0$。

至此，定理1中，$c_0 = \inf\limits_{\|u\|=\delta} I(u) \geq c_1 = \max\{I(0), I(u_1)\}$。又 I 满足(PS)条件(证明标准[1,2]，故略去细节)，从而根据定理1，I 有一临界点 $u \neq 0$。由注2(2)，定理2获证。

推论　在定理2的假设下，若 $\lim\limits_{u\to+\infty} f(x,u)/u = +\infty$(或 $\lim\limits_{u\to-\infty} f(x,u)/u = \infty$)，问题(3)有一正(负)古典解。

证明　定义

$$\bar{f}(x,z) = \begin{cases} f(x,z), & \text{当 } z \geq 0 \\ 0, & \text{当 } z < 0 \end{cases}$$

显然，$\bar{f}(x,u)$ 满足定理2的全部条件，故问题

$$\begin{cases} -\triangle u = \bar{f}(x,u) & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{8}$$

有一古典解 $\bar{u} \not\equiv 0$。令 $\Omega^- = \{x \in \Omega | \bar{u}(x) < 0\}$，因 $\bar{u}(x)$ 连续，故 Ω^- 是开集，且 $-\triangle\bar{u} = 0$，$x \in \Omega^-$，$\bar{u} = 0$，$x \in \partial\Omega^-$，根据极大值原理知，$\bar{u} \equiv 0$，故 $\Omega^- = \Phi$，即 $\bar{u} \geq 0$，$x \in \Omega$，从而 $\bar{u}$ 也是(3)的解。下证 $\bar{u} > 0$，$x \in \Omega$。为此，定义函数

$$g(x,u) = \begin{cases} \bar{f}(x,u)/u, & u \neq 0 \\ a(x) & u = 0 \end{cases}$$

不妨设 $a(x) \geq 0$(因 $a(x) < 0$ 时，令 $\bar{f}(x,u) = f(x,u) - a(x)u$，此时，$f(x,u) = o(|u|)$(当 $u \to 0$ 时)，一次项 $a(x)u$ 可以并到 $H_0^1(\Omega)$ 的范数中)，让 $g^+(x) = \max\{g(x,\bar{u}), 0\} \geq 0$，$g^-(x) = \min\{g(x,\bar{u}), 0\} \leq 0$。显然 $g = g^+ + g^-$，根据 $\lim\limits_{u\to\infty} g(x,u) = \infty$，$u$ 很大时，$g(x,u)$ 有下界，而 $\lim\limits_{u\to 0} g(x,u) = a(x) \geq 0$，将(8)变形为

$$-\triangle\bar{u} - g^-(x)\bar{u} = g^+(x)\bar{u} \geq 0 \qquad x \in \Omega$$

由 $g\ (x) \leqslant 0, g^-(x)$ 有界及 $\bar{u} \neq 0$,根据强极值原理[5]即知 $\bar{u} > 0$.

注3　(1)本文的主要结果对更一般的一致椭圆型算子 $Lu = -\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + c(x)u$ 仍然成立,证明只需作微小修改。

(2)　本文的证明方法表明,用山路引理讨论的问题,类似于 $\lim\limits_{u\to 0} f(x,u)/|u| = 0$ 的限制均可作相应放松,这里不再一一列举。

参 考 文 献

1　Ambrosetti A, Rabinowitz P H. Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Applications. J Funct. Anal. 1973,(14):349～381

2　Rabinowitz P H. Some Aspects of Critical Point Theory. Proc. 1982 Changchun Symposium D G D E, Beijing: Science Press, 1986

3　戚桂杰.山路引理的推广.科学通报,1986,(10):724～726

4　Pucci P, Serrin J. A Mountain Pass Theorem. J Diff Equs, 1985,(6):142～149

5　Gilbarg D, Trudinger N S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Springer-Verlag, 1977