⑥
36-42

一种二次规划的算法及其在安全经济调度中的应用*

AN APPROACH TO SOLVING QUADRATIC PROGRAMMING AND ITS APPLICATION TO SECURE ECONOMIC DISPATCH

郭志东** 徐国禹
Guo Zhidong Xu Guoyu
(重庆大学电气工程系)

TM 732

摘 要 提出一种基于松弛技术的二次规划新算法，并在解算过程中引用参数规划的思想，通过迭代搜索获得最优解。算法具有对初始点要求低、收敛可靠、计算负担小的特点，也可用于解算参数二次规划问题。作为应用例子，解算了电力系统中有功安全经济调度问题，给出了计算结果。

关键词 二次规划；参数规划；经济调度，电力系统
中国图书资料分类法分类号 TM 732

ABSTRACT Based on the selaxation t echnique, a new approach to solving quadratic programming is presented in this paper. The idea of parametric programming is introduced in the process of solving the problem, and the optimal solution can be obtained through a finite numfer of search iterations. The features of the proposed method are few regurements for the initial values and little computation. It can also be used to solve the parametric quadratic programming. As an example of application, it is applied to solve a real power secure economic dispatch problem in electric power systems, and its calculation results are given.

KEY WORDS quadriatic programming; parametric programming; economic dispatch

0 引 言

60年代初，开始了将含有不等式的约束的非线优化的理论和方法用于解算电力系统的优化运行问题，即最优潮流的研究。由于这种方法能够较好地处理实时安全性和可行性约束，近30年人们进行了大量的研究并取得了丰硕成果。按模型与算法可分为非线性规划、二次规划及线性规划等。非线性规划方法精度高，但往往计算负担重、收敛性较差；线性规划法

---

* 收文日期 1991－09－19
国家教委基金资助项目
** 现在深圳华能经济开发公司工作

计算简便、收敛可靠，但精度不高，在实时控制中还可能出现所不希望的多解或跳跃解；而二次规划作为两者的“过渡”模型，计算负担和精度适中，收敛性较好，从而得到人们的注视。二次规划模型与参数规划算法相结合用以求解有功安全经济调度问题，已取得了较好的效果。然而，现有的方法中对安全性约束的处理一般采用迭代检索法[1~3]，在每次迭代计算结束时插入潮流计算，对安全性约束进行检验。频繁的潮流计算加重了负担。另外，由于迭代时仅计及越限支路，所得到的解可能出现新的越限支路而造成收敛困难，甚至产生振荡解。

在有功安全经济调度的二次规划模型中，线路安全性约束是通过直流潮流方程来描述的。由于在正常运行条件下线路一般不出现过载，即使在单一支路停运时越限支路为数也不多，反映在规划模型中安全性约束的有效约束个数就不多，大量的为无效约束。针对这类问题的特点，本文提出一种二次规划的新算法，在解算过程中应用松弛技术，将不等式约束分为有效约束和无效约束两个子集[4]，在迭代计算时仅考虑有效约束集并用库恩—图克条件寻优，然后计及无效约束集以控制步长。这样，既降低了解算规模又保证了可靠收敛，提高了计算效率。文中还引用参数规划的思想，将等式约束右端常数项表示为参数形式，利用参数规划方法求出最优解轨迹。这样，即便于启动求解，又可提高解的连续性及收敛可靠性。所研讨的算法虽是针对固定负荷下的经济调度问题，但也可求解在一定条件下负荷变化时的安全经济调度问题。本文对 IEEE30节点系统进行了计算，并与有关文献其它算法所得结果作了比较，表明所提出的新算法是有效的。

1 二次规划的新算法

1.1 问题的提出

考虑变量为 X 的二次凸规划问题，其模型为：

$$
(M1)\begin{cases}
\min f = C^T X + \dfrac{1}{2} X^T H X & (1)\\
\text{s.t.}\ AX = b & (2)\\
DX \leqslant E & (3)\\
\underline{X} \leqslant X \leqslant \overline{X} & (4)
\end{cases}
$$

式中，X 为 n 维向量；$\overline{X}$ 和 $\underline{X}$ 分别为其上、下限值；C 与 H 分别为 n 维系数向量与正定阵；A 与 D 分别为 $m\times n$ 与 $l\times n$ 维系数矩阵；b 与 E 分别为 m 与 l 维常数向量。

对模型（$M1$）求解时，如果只考虑等式约束(2)式，则用拉格朗日乘子法可方便地求得最优解；如果还要计及不等式约束式(3)和(4)，求解就不那么简便了。这时，虽可应用库恩一图克定理求解，但当不等式约束很多时，直接用库恩一图克定理将使求解过程繁杂，且收敛缓慢，为此，有必要探索新的解算方法。

1.2 新算的构思

为了寻求更有效的算法，本文运用参数规划的思想和松弛技术。

首先，在一个仅满足不等式约束而不满足等式约束的解点 X'（称为准可行点）处，把等式约束右端常数项 b 表示成参数形式：

$$\bar{b}(\theta) = b_0 + \theta \triangle b_0$$

其中，θ 为参变量，$b_0 = AX'$，$\triangle b_0 = b - b_0$

于是，模型(M1)可用以下参数二次规划来表述：

$$(M2)\begin{cases} \min f = C^T X + \frac{1}{2} X^T H X \\ s.t.\ AX = b_0 + \theta\triangle b_0 \\ \quad DX \leqslant E \\ \quad \underline{X} \leqslant X \leqslant \overline{X} \end{cases} \tag{5}$$

模型$(M2)$的解为一条最优解轨迹$X(\theta)$。显然，当$\theta = 1$时，$b(\theta) = b$，所以$X(\theta = 1)$即原二次规划问题$(M1)$的最优解。

其次，在解算过程中应用松弛技术对不等式约束进行处理。在此引入有效约束集的概念：在给定点X处，某些不等式约束以等式成立，则称之为有效(起作用的)约束；若以严格不等式成立，则称之为无效(未起作用的)约束。在求解$(M2)$时，在给定点X点进一步寻优时，先暂将无效约束松弛掉，只计及有效约束(包括原等式约束)，而在寻优中确定步长时再计及无效约束，以保证解的可行性及收敛可靠。

1.3 解算方法

1.3.1 仅含算式约束时

对模型(M2)不计所有的不等式约束，通过拉格朗日乘子向量λ及相应的等式约束构造如下的拉格朗日函数

$$L = C^T X + \frac{1}{2} X^T H X + \lambda^T (AX - b_0 - \theta\triangle b_0) \tag{6}$$

它的最优解条件为

$$\begin{bmatrix} H & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(\theta) \\ \lambda(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C \\ b_0 + \theta\triangle b_0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

或用展开式

$$\begin{cases} HX(\theta) = A^T\lambda(\theta) - C \\ [AH^{-1}A^T]\lambda(\theta) = AH^{-1}C + b_0 + \theta\triangle b_0 \end{cases} \tag{8}$$

定义X_0和λ_0为$\theta = 0$时的解，$\triangle X$和$\triangle\lambda$为对应于$\triangle b_0$的X和λ的增量，可写出

$$\begin{cases} HX_0 = A^T\lambda_0 - C \\ [AT^{-1}AT]\lambda_0 = AH^{-1}C + b_0 \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} H\triangle X = A^T\triangle\lambda \\ [AT^{-1}A^T]\triangle\lambda = \triangle b_0 \end{cases} \tag{10}$$

从而可得

$$\begin{bmatrix} X(\theta) \\ \lambda(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ \lambda_0 \end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix} \triangle X \\ \triangle\lambda \end{bmatrix} \tag{11}$$

对于一定的b_0和$\triangle b_0$的值，由式(9)和(10)可求得一组X_0和λ_0及$\triangle X$和$\triangle\lambda$的值。因无不等式约束，X和λ不受任何限制，就可由式(11)直接求出θ在$0 \sim 1$间任何值时的最优解$X^*(\theta)$和$\lambda^*(\theta)$。顺便指出：当只存在等式约束时，只令$\theta = 1$即可用解析法直接用式(7)求出原规划问题的最优解，引入参数规划的思想并无实际意义。这里采用这种描述形式只是为了便于讨论含不等式约束的情况。

1.3.2 计及等式约束及不等式约束时

当计及$(M2)$中不等式约束(3)和(4)时，在准可行点X'处把不等式约束集分成有效约

束集{p}及无效约束集{q}（与之对应的参量和系数均用下标 p 和 q 表示）。在 X' 处进一步寻优时，把有效约束暂看作等式约束，用库恩—图克乘子将其引入增广目标函数中。这时式（9）和（10）中的矩阵 A、b_0 和 $\triangle b_0$ 分别改为 $[A \quad D_p]^T$、$[b_0 \quad E_p]^T$ 和 $[\triangle b_0 \quad 0]^T$，并增加相应的乘子向量 λ_p 和 $\triangle\lambda_p$，可得到类似于式（9）和（10）的关系式，从中可求得 X_0、λ_0、λ_{p0}、$\triangle X$、$\triangle\lambda$ 和 $\triangle\lambda p$，且有

$$\begin{bmatrix} X(\theta) \\ \lambda(\theta) \\ \lambda p(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ \lambda_0 \\ \lambda_{p0} \end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix} \triangle X \\ \triangle\lambda \\ \triangle\lambda_p \end{bmatrix} \tag{12}$$

而 $X(\theta)$ 和 $\lambda_p(\theta)$ 应满足以下条件

$$\begin{cases} D_q X(\theta) \leqslant E_q \\ \underline{X} \leqslant X(\theta) \leqslant \overline{X} \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} \lambda_p(\theta) \geqslant 0, \ p \in \{U_p\} \\ \lambda_p(\theta) \leqslant 0, \ p \in \{L_p\} \end{cases} \tag{14}$$

其中，$\{U_p\}$ 和 $\{L_p\}$ 分别为处于上界与下界的有效约束集合。因此 θ 的取值要受到限制。为了讨论的方便，暂设 X_0 在可行域内，由下式确定 θ 的取值

$$\theta = min\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\} \tag{15}$$

其中

$$\theta_1 = \min_i\left\{ \frac{E_i - D_i X_0}{D_i \triangle X} \Big|_{D_i\triangle X>0} \qquad i \in q \right\} \tag{16}$$

$$\theta_2 = \min_i\left\{ \frac{\overline{X}_i - X_{i0}}{\triangle X_i} \Big|_{\triangle X_i>0} \quad 或 \quad \frac{X_{i0} - \underline{X}_i}{\triangle X_i} \Big|_{\triangle X_i<0} \right\} \tag{17}$$

$$\theta_3 = \min_i\left\{ -\frac{\lambda_{i0}}{\triangle\lambda_i} \Big|_{\triangle\lambda_i<0} \qquad i \in U_p \right\} \tag{18}$$

$$\theta_4 = \min_i\left\{ -\frac{\lambda_{i0}}{\triangle\lambda_i} \Big|_{\triangle\lambda>0} \qquad i \in L_p \right\} \tag{19}$$

如果 $\theta \geqslant 1$，则表明 $\theta = 1$ 时 $X(\theta)$ 和 $\lambda p(\theta)$ 不会违反式（13）和（14）。所求出的 $X(\theta)$ 可作为（$M2$）的最优解轨迹，而 $X(\theta = 1)$ 就是原规划（$M1$）的最优解。

如果 $\theta < 1$，则说明 $\theta = 1$ 时 $X(\theta)$ 和 $\lambda p(\theta)$ 将使式（13）或（14）中的某个条件不满足。此时不能用式（12）计算 $X(\theta)$ 及 $\theta = 1$ 时的最优解，而需要进一步的迭代计算。
在迭代修正时，如果 $\theta < 1$ 且取值于 θ_1 或 θ_2，则表明 θ 未达到1时，将出现无效约束变为有效约束，应该把该约束加入到有效约束集并修正有关集合与矩阵，重新计算；如果 $\theta < 1$ 且取值于 θ_3 或 θ_4，则表明 θ 未达1时某个有效约束对应的乘子将改变符号，若去掉该有效约束目标函数将进一步减小，所以应该把该约束换到无效约束集中并修改有关集合及矩阵，再作计算。这种修正迭代直到 $\theta \geqslant 1$ 时终止。

由于每次迭代计算中只计及了不等式中的有效约束，大量的无效约束被松弛掉，使计算规模大幅度地降低。另外，在寻优过程中有效约束相对的乘子和无效约束起着步长限制的作用，保证了解的可行性和收敛。

1.4　初始值问题

任给一初始值 X''，只要满足变量的上、下界约束式（4）即可。记违反函数不等式约束的

集合为 J、不违反的约束为 K，构造一函数 g：

$$g = \sum_{i \in J} (D_i X - E_i) \tag{20}$$

将不等式约束边界构成可行域，显然，在域外的任一点均有 $g > 0$，而在域的任一点都有 $g = 0$，利用线性规划中的有效约束集法[4]解下面的辅助线性规划，其最优解就是准可行点 X'。

$$\begin{cases} \min g = \sum_{i \in J} (D_i X - E_i) \\ s.t.\ D_i X \leqslant E_i \quad (i \in K) \\ \qquad \underline{X} \leqslant X \leqslant \overline{X} \end{cases} \tag{21}$$

前面曾假设由 X' 确定的 X_0 在可行域内，实际上并不一定如此。如果 X_0 在可行域外，则把点 X' 和 X_0 形成的线段和可行域界面的交点作为 X_0 开始迭代。由此可见，本文算法对初始点要求极低，便于启动求解。

还应指出：本算法虽是为了解算模型($M1$)而引入参数规划思想，它对于等式约束右端含有参变量的参数二次规划也完全适用。

2 安全有功经济调度的模型

电力系统有功安全经济调度就是在满足系统运行可行性及安全性约束条件下，力求全系统的运行费用最少，这是一个复杂的非线性规划问题。在高压电网中，利用有功与无功控制的解耦，它可描述为仅以发电机有功功率为变量的非线性规划问题

$$(M3)\begin{cases} \min F = \sum_{i \in NG} F_i(P_{Gi}) & (22) \\ s.t.\ \sum_{i \in NG} P_{Gi} = P_D + P_L & (23) \\ \qquad \underline{P}_l \leqslant P_l(P_G) \leqslant \overline{P}_l \quad (l = 1 \sim NL) & (24) \\ \qquad \underline{P}_{Gi} \leqslant P_{Gi} \leqslant \overline{P}_{Gi} \quad (i = 1 \sim NG) & (25) \end{cases}$$

式中，NG 为发电机台数；NL 为支路数；F_i 为第 i 以发电机运行费用；P_D 和 P_L 分别为系统总负荷和网损；P_{Gi}、$\overline{P}_{Gi}$、$\underline{P}_{Gi}$ 分别为第 i 台发电机有功出力及其上、下限值；P_l、$\overline{P}_l$、$\underline{P}_l$ 分别为第 l 条支路有功潮流及其上、下限值。式(22)为运行总费用；式(23)为系统有功平衡约束；式(24)为线路安全约束；式(25)为发电机有功出力限制约束。

对模型($M3$)进行简化，发电机运行费用用有功出力的二次函数表示，在运行点(P_G^0)将网损线性化，支路有功用直流潮流描述[6]，于是得如下二次规划模型：

$$(M4)\begin{cases} \min F = \sum_{i \in NG} (a_i P_{Gi}^2 + b_i P_{Gi} + C_i) & (26) \\ s.t.\ \sum_{i \in NG} \alpha_i P_{Gi} = \omega_1 & (27) \\ \qquad \beta P_G \leqslant \omega_B & (28) \\ \qquad \overline{P}_G \leqslant P_G \leqslant \underline{P}_G & (29) \end{cases}$$

式中，a_i, b_i, c_i 为第 i 台发电机费用系数。

$$\alpha_i = 1 - \partial P_L / \partial P_{Gi} \quad (i = 1, NG) \tag{30}$$

$$\omega_1 = P_D + P_L^0 - \sum_{i \in NG} \frac{\partial P_L}{\partial P_{Gi}} P_{Gi}^0 \tag{31}$$

$$\beta = B_{BB} A_{BN} B_{NN}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{32}$$

$$\omega_B = B_{BB} A_{BN} B_{NN}^{-1} \left[P_D \right] \tag{33}$$

其中 B_{BB} 为支路导纳矩阵；B_{NN} 为节点导纳矩阵；A_{BN} 为支路 — 节点关联矩阵；P_D 为节点负荷向量。在运行点 P_G^0 处，α_i 及 ω_1、ω_B 和 β 为常量，考虑到电力系统实际运行情况，模型($M4$)一般为二次凸规划，用第 1 节所述方法可求解。当负荷变化时，若忽略对安全性约束的影响，反映在模型($M4$)中的等式约束右端常数项为变化量，用前述二次规划方法仍可求此时的安全经济调度问题。但当负荷变化较剧烈时，对安全性约束的影响不能不计。这时等式约束与不等式约束之间存在某种复杂的耦合关系，只有当这种耦合关系通过某种方法解耦后才能用本文算法求解。

表 1　IEEE30节点系统计算结果(标么值，基值 S_B＝100 MV·A)

		本文方法	文献[6]	文献[8]
发电机有功功率	P_{G1}	1.7656	1.7988	1.7626
	P_{G2}	0.4895	0.4870	0.4884
	P_{G6}	0.2150	0.2153	0.2151
	P_{G8}	0.2207	0.1953	0.2215
	P_{G11}	0.1186	0.1166	0.1212
	P_{G13}	0.1200	0.1260	0.1200
发电机总有功		2.9293	2.9372	2.9290
网损		0.09562	0.09785	0.09480
总费用		802.4598	802.5341	802.400
迭代次数		2	4	/

表 2　IEEE30节点系统数据修改后结果

		本文方法	文献[6]	文献[7]
发电机有功功率	P_{G1}	1.4911	1.5174	1.4500
	P_{G2}	0.5709	0.5670	0.5600
	P_{G6}	0.2334	0.2326	0.2418
	P_{G8}	0.3278	0.3045	0.3500
	P_{G11}	0.1486	0.1517	0.1400
	P_{G13}	0.1385	0.1400	0.1200
发电机总有功		2.9104	2.9132	2.9097
网损		0.07805	0.0790	0.07745
总费用		807.9116	807.2494	808.2765
迭代次数		2	4	3

3　数字算例

为验证算法的有效性，本文用 IEEE30节点系统为例子计算了在负荷给定条件下有功安

全经济调度，并与有关文献作了比较，结果列于表1和表2（表2为该系统中1号线路有功限额由1.3降为1.0时计算结果）。

从表中数据要以看出，本文算法所求得的发电机有功功率、网损、总费用与文献[6]及[8]的结果非常接近，而这两份文献中分别是用二次规划与非线性规划方法且计及了无功的影响所求解的，这充分表明本文算法具有较好的精度。另外，迭代次数明显低于文献[6]，也少于用分段线性规划求解的文献[7]，即本算法具有迭代次数少、计算效率高的优点。

4 结　论

本文把参数规划与松弛技术巧妙地结合起来，提出了一种解算二次规划的新算法。克服了用库恩—图克定律求解含不等式约束优化问题时收敛困难的缺点。通过"松弛"与寻优步长的"控制"，不仅降低了计算规模，而且收敛的快速与可靠。它还具有对初始点要求不苛刻的优点。算法还可用于求解参数二次规划问题。用本算法解算电力系统有功安全经济调度问题，具有精度高、收敛可靠、计算量小的特点。

参 考 文 献

1 Nicholson H, sterling M J H. Optimal Dispatch of Active and Reactive Generation by Quadratic Programming. IEEE Trans, 1973, PAS-92: 644～654

2 Aoki k, Satoh T. Economic Dispatch with Network Security Constiaints using Parametric Quadratic Programming. IEEE Trans, 1982, PAS-101: 4548～4556

3 Carpentier J, Cotto G, Niederlander P. New Concepts for Automatic Generation Control in Electric Power Systems using Parametric Quadratic Programming. In: Proc IFAC. Gudalajara: 1983. 595～600

4 Philip E G. Practical Optimigation. London: Academic Press, 1981

5 郭志东. 互联电力系统有功调度的一种参数二次规划算法. 重庆大学硕士论文. 1989

6 王鲁，徐国禹. 应用二次规划解算安全有功经济调度. 重庆大学学报, 1987, 10(34): 1～10

7 李志平. 安全经济自动发电控制的分段线性规划模型及解法. 重庆大学硕士论文. 1988

8 Alsac O, stott B. Optimal Load Flow with Steady-stale Security. IEEE Trans, 1974, PAS-93(3)