(15)
92-97

多目标优化的模糊解法中目标权重的处理方法*

A PROCESSING METHOD FOR THE WEIGHT OF THE OBJECT IN THE FUZZY SOLVING METHOD FOR THE MULTI-OBJECTIVE OPTIMIZATION

王彩华　　朱煜东
Wang Caihua　　Zhu Yudong
（重庆大学工程力学研究所）

TB114.1

摘　要　配合多目标优化的模糊解法，提出一种多目标优化中目标权重的处理方法：即不赋予各目标以相应的权数，而是针对各单目标模糊最优解，选取不同的隶属函数类型和调整隶属函数中的参数，来达到调整各目标权重的目的。研究不同的隶属函数类型及其参数对多目标最优解的影响规律，给出了具体算例。

关键词　多目标最佳化；权；模糊集；隶属函数，优化，模糊解法
中国图书资料分类法分类号　NO3.0159

ABSTRACT　A processing method for the weight of the object in the fuzzy solving method for the multiojectide optimization are presented. The methods are using different type of membership functions and using the same kind membership function adjusting the parameter. Some corresponding analysis and examples are discussed and the results show that the two methods are very effective.

KEY WORDS　multi-objective optimization; weight; fuzzy sets; membership functions

0　引　言

在工程优化设计中，当设计方案涉及两个以上的指标时，便可构成多目标优化问题。求解这类问题，除了考虑各目标的要求外，还必须考虑各目标的重要程度。过去人们采用赋予各目标权数的方法反映各目标的重要程度。但是，在多目标优化的模糊解法中[1,2,3]，由于多目标最优解是从各单目标模糊最优解的交集（即模糊优越集）给出的，故难以通过赋予权数来反映各目标的重要程度。因此，必须寻求一种与此相应的目标权重的重处理方法，以保证优化结果更符合客观实际。本文针对这一问题，提出了一种处理目标权重的方法：对各单目标的模糊最优解，按照各目标的重要程度，选择不同的隶属函数类型和（或）调整隶属函数的

* 修改稿收文日期　1992—03—15
国家自然科学基金资助项目

参数，来调整模糊优越集的分布状态，从而可得出不同权重分配下的多目标最优解。算例表明，该方法是切实可行的。

1　多目标优化的模糊解法

设多目标优化问题为：

$$
\begin{array}{lll}
\text{Find} & x = [x_i]^T & i = 1,2,\cdots,n \\
\min & F(x) = [f_j(x)]^T & j = 1,2,\cdots m \\
\text{s.t.} & g_k(x) \leqslant 0 & k = 1,2,\cdots p \\
 & x_i \geqslant 0 & i = 1,2,\cdots,n
\end{array}
\tag{1}
$$

问题(1)可以是非模糊的，也可以带有模糊目标或模糊约束。不论是否具有模糊性，均可按如下思想求解：先单独求出各个目标的约束最优解 x_j^* 和最优值 f_j^* 与最坏(大)值 f_j°($j = 1,2,\cdots,m$)；再将单目标最优值 f_j^* 在 $[f_j^*, f_j^{\circ}]$ 区间上模糊化，即用一目标值空间上的模糊子集 $\underset{\sim}{M_j}$ 表示，其隶属函数 $\underset{\sim}{M}(f_j)$ 应满足：$\underset{\sim}{M}(f_j^*) = 1$，在 $[f_j^*, f_j^{\circ}]$ 上单调下降。例如，

$$\underset{\sim}{M}(f_j) = \left[\frac{f_j^{\circ} - f_j}{f_j^{\circ} - f_j^*}\right]^q \qquad (q = 1,2,\frac{1}{2},3,\frac{1}{3}\cdots) \tag{2}$$

将 $\underset{\sim}{M}(f_j)$ 映射到设计空间 x，即得模糊最优解 $\underset{\sim}{N_j}$，根据扩展原理[4]，其隶属函数为：

$$\underset{\sim}{N}(f_j) = \left[\frac{f_j^{\circ} - f_j^{(x)}}{f_j^{\circ} - f_j^*}\right]^q \qquad (q = 1,2,\frac{1}{2},3,\frac{1}{3}\cdots) \tag{3}$$

使 $\underset{\sim}{N_j}(x)(j = 1,2,\cdots,m)$ 的交集(模糊优越集)D 之隶属函数

$$\underset{\sim}{D}(x) = \bigwedge_{j=1}^{m} \underset{\sim}{N_j}(x) \tag{4}$$

取最大值的解 x^*，即为多目标优化问题(1)的最优解[1]，即

$$\underset{\sim}{D}(x^*) = \max_{x\in R}\left[\bigwedge_{j=1}^{m} \underset{\sim}{N_j}(x)\right] \tag{5}$$

其中，R 为可行域。

按(5)式求最优解时，通常将其转化为如下单目标优化问题：

$$
\begin{array}{lll}
\text{Find} & x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda)^T & \max \quad \lambda \\
\text{s.t.} & g_k(x) \leqslant 0 & (k = 1,2,\cdots p) \\
 & N_j(x) \geqslant \lambda & (j = 1,2,\cdots,m) \\
 & 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 &
\end{array}
\tag{6}
$$

显然，在上述优化过程中，各个目标的地位是平等的，未考虑其权重，也难以通过赋予权数来考虑权重。

2　通过选择隶属函数的类型考虑权重

我们要解决的问题是调整多目标最优解 x^* 在设计空间的位置，使之按一定程度靠近重要目标解。由于不同隶属函数类型具有不同几何图象，故在单目标最优解模糊化时，可根据目标的重要程度选择不同类型的隶属函数，从而调整最优解在设计空间的位置，使之向重要目标靠近，以增加重要目标对多目标最优解的影响。常见的几种隶属函数类型见表1。

图 1 反映了不同类型的隶属函数对多目标最优解的影响。图 1(a) 中，由于两目标同等重要，故 $\underset{\sim}{N}_1(x)$ 和 $\underset{\sim}{N}_2(x)$ 都取同样的正态分布函数，$H_1 = H_2$；

表 1　常见的隶属函数类型及突出重要程度的参数调整趋势

	隶属函数类型	参数调整趋势
尖 Γ 型	$\underset{\sim}{N}(x) = \begin{cases} e^{k(x-a)} & (x \leqslant a, k > 0) \\ e^{-k(x-a)} & (x > a, k > 0) \end{cases}$	增大 k
锥　型	$\underset{\sim}{N}(x) = \begin{cases} (k - \lvert x - a \rvert)/k & (a - k \leqslant x \leqslant a + k, k > 0) \\ 0 & (其它) \end{cases}$	减小 k
哥西型	$\underset{\sim}{N}(x) = \dfrac{1}{1 + k(x-a)^\beta}$　(β 为偶数，$k > 0$)	增大 k
抛物型	$\underset{\sim}{N}(x) = \begin{cases} 1 - k(x-a)^2 & (a - 1/\sqrt{k} \leqslant x \leqslant a + 1/\sqrt{k}, k > 0) \\ 0 & (其它) \end{cases}$	增大 k
正态型	$\underset{\sim}{N}(x) = e^{-(x-a)^2}$　($k > 0$)	增大 k

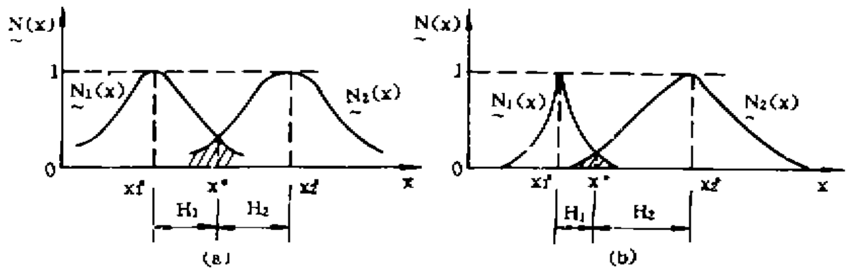

图 1

如果目标 f_1 比 f_2 重要，则 $\underset{\sim}{N}_1(x)$ 可取靠近中心分布的 Γ 型函数，如图 1(b)，结果使 $H_1 < H_2$，x^* 更靠近 x_1^*，突出了 f_1 的重要程度。

例 1　解多目标优化问题：

$$
\begin{aligned}
&\text{Find} && x = (x_1, x_2)^T \\
&\min && f_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - 10x_1 - 4x_2 + 60 \\
& && f_2(x) = x_2^3[(x_1 - 3)^2 - 9] / (27\sqrt{3}) \\
&\text{s.t.} && -x_1 - x_2 + 16 \geqslant 0 \\
& && \sqrt{3}x_1 - x_2 \geqslant 0 \qquad 0 \leqslant x_i \leqslant x \qquad (i = 1, 2)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

假如 f_1 比较重要，$\underset{\sim}{N}_2(x)$ 取为正态型，$\underset{\sim}{N}_1(x)$ 依次取表 2 中五种类型。从表 2 中可看出，当隶属函数的参数一定时，表中五种类型的隶属函数在突出目标的权重方面，从上至下后者优于前者，锥形和尖 Γ 型较好。

若将 $\underset{\sim}{N}_1(x)$ 取为锥型，而将 $\underset{\sim}{N}_2(x)$ 取表 3 中 5 种不同类型，从表 3 看出：在隶属函的参数不变时，非重要目标取正态型和抛物型能较好地突出重要目标。

综合表 2 和表 3 两种情况，可得出如下结论：重要目标的隶属函数，宜选取尖 Γ 型和锥型分布；非重要目标的隶属函数，宜选取正态型和抛物型分布；还可以进一步根据表中 H_1 的大小，确定各种重要程度的目标函数选取何种类型的隶属函数为宜。一般来说，从重要到不重要的目标，选取隶属函数的优先顺序为：

$$\text{尖}\Gamma\text{型} > \text{锥型} > \text{哥西型} > \text{抛物型} > \text{正态型} \tag{8}$$

如果把隶属函数大致区分为上凸型，线性型和下凸型三类(图2)，则它们突出重要目标的优先顺序为：

$$\text{下凸型} > \text{线性型} > \text{上凸型} \tag{9}$$

显然，关系(8)和(9)是一致的。

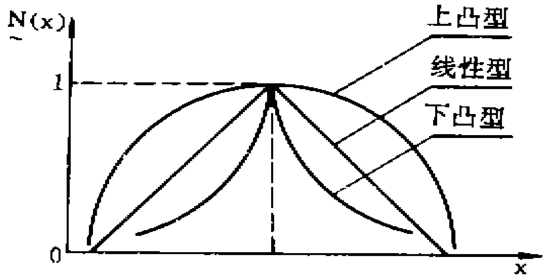

图 2

表 2　重要目标取不同类型的隶属函数

单目标最优解				单目标模糊最优解		多目标最优解	
x_1^*	f_1^*	x_2^*	f_2^*	$N_1(x)$	$N_2(x)$	x^*	$H_1=\|x^*-x_1^*\|$
(8.000,5.995)	8.000	(4.801,8.315)	-70.779	正态型	正态型	(5.826,8.228)	2.868
				哥西型	正态型	(5.471,8.132)	2.644
				抛物型	正态型	(6.470,7.360)	2.050
				尖Γ型	正态型	(6.136,7.885)	1.935
				锥型	正态型	(6.292,7.317)	1.708

表 3　非重要目标取不同类型的隶属函数

单目标最优解				单目标模糊最优解		多目标最优解	
x_1^*	f_1^*	x_2^*	f_2^*	$N_1(x)$	$N_2(x)$	x^*	$H_1=\|x^*-x_1^*\|$
(8.000,5.995)	8.000	(4.801,8.315)	-70.779	锥型	正态型	(6.292,7.317)	1.708
				锥型	哥西型	(6.157,8.014)	2.734
				锥型	抛物型	(5.522,8.095)	2.585
				锥型	尖Γ型	(4.994,8.615)	3.258
				锥型	锥　型	(5.331,8.465)	2.885

3　通过调整隶属函数的参数考虑权重

不同权重的目标，其模糊最优解的隶属函数也可采用同一种类型。此时，不同的权重通

过取隶属函数中参数的不同值来体现。

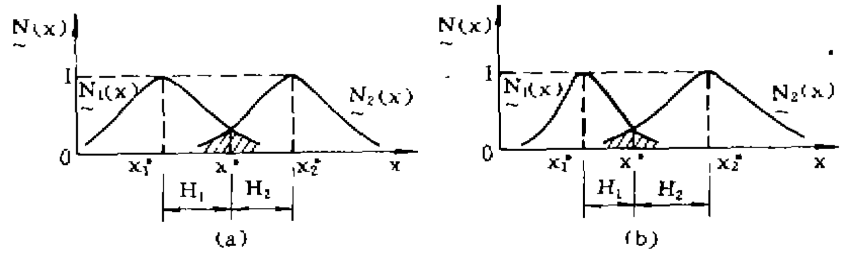

图 3

图 3 反映了正态分布的隶属函数，参数对多目标最优解的影响。图 3(a) 中，两目标权重一样，故 $\underset{\sim}{N}_1(x)$ 和 $\underset{\sim}{N}_2(x)$ 取相同的参数：$k_1 = k_2$，从而有 $H_1 = H_2$；图 3(b) 中，目标 $\underset{\sim}{f}_1$ 更为重要，则增大 $\underset{\sim}{N}_1(x)$ 中的参数 k_1 的值，结果使 $H_1 < H_2$，最优解 x^* 更靠近 x_1^*，突出了 $\underset{\sim}{f}_1$ 的重要性。

图 4

对其它类型的隶属函数，均可作类似的处理。几种常见的隶属函数类型突出重要目标的参数调整趋势，见表1。

例 2 仍以多目标规划(7)为例，研究同样类型的隶属函数，当其参数取不同值时，对多目标最优解的影响。

设目标 f_1 比较重要，各单目标模糊最优解均取正态型。当 $\underset{\sim}{N}_1(x)$ 中分别取 $k_1 = 0.5$，2，8，32，128，而 $\underset{\sim}{N}_2(x)$ 中的 $k_2 = 0.5$ 时，从表 4 看出，随着 k_1 值增大，H_1 逐渐减小，突出重要目标的程度越强。图 4 给出了取正态分布型，H_1 随 k_1 的变化趋势。

如各单目标的模糊最优解均取哥西分布型，$k_1 = 2, 4, 8, 16, 32$；$k_2 = 2$，则有关结果见表 5。从表 5 中看出，H_1 随 k_1 增大而减小。图 5 给出了这种情况下 H_1 随 k_1 变化的趋势。

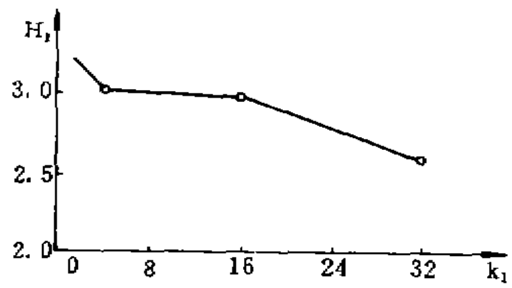

图 5

表 4　取正态型隶属函数改变其中参数的比较

单目标最优解				单目标模糊最优解		多目标最优解	$H_1=\|x^*-x_1^*\|$
x_1^*	f_1^*	x_2^*	f_2^*	$\underset{\sim}{N_1}(x)$	$\underset{\sim}{N_2}(x)$	x^*	
(8.000,5.995)	8.000	(4.801,8.315)	70.779	$k_1=0.5$	$k_2=0.5$	(5.826,8.288)	2.868
				$k_1=2$	$k_2=0.5$	(5.573,7.344)	2.776
				$k_1=8$	$k_2=0.5$	(6.042,7.218)	2.309
				$k_1=32$	$k_2=0.5$	(6.079,6.943)	2.142
				$k_1=128$	$k_2=0.5$	(6.142,6.872)	2.055

表 5　取哥西型隶属函数改变其中参数的比较

单目标最优解				单目标模糊最优解		多目标最优解	$H_1=\|x^*-x_1^*\|$
x_1^*	f_1^*	x_2^*	f_2^*	$\underset{\sim}{N_1}(x)$	$\underset{\sim}{N_2}(x)$	x^*	
(8.000,5.995)	8.000	(4.801,8.315)	70.779	$k_1=2$	$k_2=2$	(5.042,8.560)	3.193
				$k_1=4$	$k_2=2$	(5.165,8.463)	3.042
				$k_1=8$	$k_2=2$	(5.153,8.333)	3.009
				$k_1=16$	$k_2=2$	(5.216,8.370)	2.961
				$k_1=32$	$k_2=2$	(5.565,8.249)	2.592

4 结　　语

本文的方法基本上解决了多目标优化的模糊解法中处理目标权重的问题。由于不同类型的隶属函进行比较时，各函数中的参数难以固定在同一值上(没有统一的标准)，所以难以进行绝对比较。表2和表3的数值结果是各类隶属函数取某一确定值得的。虽不能得出绝对优劣排序，但基本趋势是很明显的。

目标越重要，多目标最优解越应靠近它。这一想法，当目标函数在其最优解附近的性态十分复杂时，有可有事与愿违。好在工程优化问题中，目标函数一般都比较光滑平缓，不会出现跳跃突变，故本文的方法在一般情况下是完全适用的。

多目标优化的模糊解法，其模糊优越 $\underset{\sim}{D}(x)$(见(4)式)的形式不是唯一的[6]，尚可有 $\underset{\sim}{D}(x)=\prod_{j=1}^{m}N_j(x)$ 或 $\underset{\sim}{D}(x)=\sum_{j=1}^{m}W_jN_j(x)$ 等。本文仅针对由(4)式给出的常见形式来讨论的。

参　考　文　献

1　冯英浚，多目标优化的 Fuzzy 解，科学通报，1981(17)
2　王彩华，郑佩林，液体动压滑动轴承的双目标模糊优化设计，重庆大学学报，1988，11；(11)
3　王彩华，李开果，斜齿圆柱齿轮传动的双目标模糊优化设计，机械设计，1990，(5)
4　D. Dubois and H. Prade，Fuzzy set and systems—Theory and Application，New Youk，1980
5　王彩华，宋连天等，模糊论方法学，中国建筑工业出版社，北京，1988
6　万耀青等，最优化计算方法常用程序汇编，工人出版社，北京，1983