

②  
138-143

# III - IV 级六杆机构的传力特性分析及曲柄存在准则

Analyses to the Characteristics of Force-Transfer and the Existence Criteria of Grades III - IV Six-Bar Linkages

邹昌平      梁锡昌      黄茂林  
Zou Changping      Liang Xichang      Huang Maolin

TH112.1

(重庆大学机械传动国家重点实验室)

**摘要** 本文讨论了 III 级六杆机构的曲柄存在准则及其使用方法;研究了儿种六杆机构的传力特性;得出几条重要结论;提出用“合力臂”评价六杆机构传力特性的方法;并对常用六杆机构的实用性作出了定性的评价。

**关键词** 平面六杆机构;合力臂;传力特性;曲柄存在准则

**中国图书资料分类法分类号** TH112.1

**ABSTRACT** This paper discusses the existence criteria of the crank of grade III six-bar linkage and its operation method, studies the force-transfer characteristics of a few six-bar linkages, obtains several pieces of important conclusions, raises the method that "the arm of resultant forces" can be used to evaluate the force-transfer characteristic of grade IV six-bar linkage, and makes qualitative evaluation to the practicability of common six-bar linkages.

**KEY WORDS** plane six-bar linkage; the arm of resultant forces; the force-transfer characteristic; the existence criterion of crank

## 1 III - IV 级六杆机构的传力特性分析

这里分析了三种机构的传动角和死点,并提出“合力臂”这一新指标。

### 1.1 传动角

与四杆机构一样,六杆机构的传动角是从动杆作力点的受力方向与速度方向所夹锐角(称为压力角  $\alpha$ )的余角,用  $\gamma$  表示,  $\gamma = 90^\circ - \alpha$ 。

下面就来讨论三种常见六杆机构的传动角。

#### 1.1.1 III 级六杆机构(1)

如图 1 所示,取  $GE$  为主动杆,是 III 级机构,这里研究从动杆  $DC$ (从动杆  $AB$  的情况类似,从略),构件  $MBC$  受三力  $\vec{F}_M, \vec{F}_B, \vec{F}_C$  而平衡,而  $EM, AB$  均为二力杆,  $\vec{F}_M$  和  $\vec{F}_B$  方向已知,则由

\* 收文日期 1992-07-10

“三力汇交于一点  $P$ ”可确定  $\vec{F}_C$  的方向,从而可确定  $\alpha, \gamma$  如图 1 所示。当  $GM$  取极值时,可能出现  $\gamma_{\min}$ 。

### 1.1.2 III 级六杆机构(2)

如图 2 所示,取  $ABC$  为主动杆,是 III 级机构。构件  $DEF$  受三力  $\vec{F}_D, \vec{F}_E, \vec{F}_F$  而平衡,而  $CD, BE$  均为二力杆,  $\vec{F}_D$  和  $\vec{F}_E$  的方向已知,则由“三力汇交于一点  $P$ ”可确定  $\vec{F}_F$  的方向,从而可确定  $\alpha, \gamma$ 。

### 1.1.3 IV 级六杆机构

如图 3 所示,取  $GF$  为主动杆,是 IV 级机构。构件  $DEF$  受三力  $\vec{F}_D, \vec{F}_E, \vec{F}_F$  而平衡,而  $CD, BE$  均为二力杆,  $\vec{F}_D$  和  $\vec{F}_E$  的方向已知,则由“三力汇交于一点  $P$ ”可确定  $\vec{F}_F$  的方向。根据作用力和反作用力的关系,可确定从动件  $ABC$  在  $C, B$  处受力  $\vec{F}_{DC}, \vec{F}_{EB}$  的方向,由此可确定  $C, B$  处的  $\alpha, \gamma$ , 分别用  $(\alpha_2, \gamma_2)$  和  $(\alpha_1, \gamma_1)$  表示,  $\gamma_1, \gamma_2$  将综合标志该 IV 级机构的传力特性。实际上在某一位置,二传力杆  $CD, BE$  中一个杆为主要的传力杆。其结果将由二力的综合作用效果来确定,而不能单独由  $\gamma_1$  或  $\gamma_2$  来确定。

## 1.2 合力臂

由以上分析可知,IV 级六杆机构的传力特性评定指标不够直观、明确,有必要寻求新的合适的评定指标。为此,通过进一步分析,我们提出“合力臂”这一新指标,其含义和作用如下所述。

由图 3 可知,  $\vec{F}_F$  实为  $\vec{F}_{DC}, \vec{F}_{EB}$  的合力,它对转动中心  $A$  的力臂为  $d, d$  就是“合力臂”。 $d$  越大,合力矩也越大,机构的传力特性肯定越好;反之,  $d$  越小,机构的传力特性必定越差。可见,用合臂  $d$  能很好地衡量 IV 级六杆机构的传力特性。 $d = 0$  时,机构出现死点。由图 3 可见,  $d$  的确定十分容易,联接二传力杆的交点  $P$  与主动曲柄铰链点  $F$ ,即确定了合力作用线,该线至输出杆固定铰链中心的垂距即为合力臂  $d$ 。若二传力杆相互平行,则其合力及  $d$  也是易于确定的。作用力的方向及从动杆的转向也易于判断,可见  $d$  是一个直观、综合、方便的传力特性指标。

## 1.3 死点

死点是从动杆出现  $\gamma = 0$  或  $d = 0$  的机构位置,对于图 1 所示机构,当  $GE, EM$  共线时,  $GM$  取极值,  $GM, AB, DC$  三线汇交于构件  $MBC$  的绝对速度瞬心  $P, \gamma = 0, d = 0$ , 出现死点。对于图 2 所示机构,当  $\vec{F}_F$  的作用线通过  $G$  点时,  $\gamma = 0, d = 0$ , 出现死点。对于图 3 所示机构,当  $CD, BE, AP$  三线汇交于构件  $DEF$  相对于构件  $ABC$  的速度瞬心  $P$  时,合力  $\vec{F}_F$  的作用线将通过点  $A, d = 0$ , 出现死点。

对 III 级机构,其传力特性还有一个十分重要的指标,如图 4 所示,  $M_2$  首先要通过  $M$  传至  $B, C$ , 因而  $M$  点处的传动角  $\gamma_m$  是衡量该机构传力特性的重要参数。显然,当  $EM$  通过瞬心点  $P$  时,  $\gamma = 0$ , 出现死点,已为前述,而且在此位置附近的  $\gamma$  角都很小,传力特性很差。而由前述讨论可知,若取  $(EM + EG) = L_{\max}, |EM - EG| = L_{\min}$  时,必然会出现至少两次  $EM, AB, CD$  共点的状况,导致传力特性及运动的确定性变坏。因此,III 级六杆机构的传力特性一般均不够理想,只有当  $G$  点处于  $M$  点封闭轨迹内(图 5(a)), (1) 式取不等式时,才可能获得好的传力特性。IV 级六杆机构,由于一般  $F$  点相对于  $ABC$  杆的轨迹(图 3)只能取非封闭形,其传力特性一般也不理想,且其函数特性与四杆机构类似。因此,全铰链平面六杆机构的使用必须慎重,要认真考核其传力特性。

## 2 Stephenson 型六杆机构曲柄铰链中心到连杆铰链中心距离的极值问题

### 2.1 曲柄存在与 L 的极值

四杆以上多杆机构曲柄存在与否的判断常常相当困难,对此已有不少讨论。

例如图 5(a) 所示的 III 级六杆机构,众所周知,其曲柄存在的条件为:

$$s + t \geq L_{\max}, |s - t| \leq L_{\min} \quad (1)$$

式(1)中,  $L_{\min}$ 、 $L_{\max}$  分别为曲柄铰链中心  $G$  到基础四杆机构  $ABCD$  的连杆铰链中心  $M$  的最近与最远距离。当该六杆机构中的  $M$  点的轨迹为一封闭的连杆曲线时,显然可以将  $L$  视为一可变长度杆,若要  $GE$  成为曲柄,则可变向量  $\vec{L}$  也必须能相对于  $G$  点作整周旋转。这就得到存在曲柄的一个基本条件:  $G$  点必须处于  $M$  点的封闭轨迹之内。

因此,在机构各尺寸参数已知后,要判断是否存在曲柄,则必须

- ① 计算  $M$  点的轨迹,检查  $G$  点是否处于封闭轨迹内;
- ② 计算出  $L_{\max}$  及  $L_{\min}$ ,检查杆长  $s, t$  是否满足(1)式。

而  $L$  极值的计算是一个关键问题,也是一个较为困难的问题。

### 2.2 L 取极值的运动学含义与运动几何学条件

由图 5(a) 可知,  $L = GM$ , 利用两点间距离公式得:

$$L^2 = (X_M - X_G)^2 + (Y_M - Y_G)^2 \quad (2)$$

在式(2)中,  $X_M = f_1(\varphi)$ ,  $Y_M = f_2(\varphi)$ ,  $L = f(\varphi)$ ,  $X_G$  和  $Y_G$  都是与  $\varphi$  无关的定数。

将(2)式两边平方再对  $\varphi$  求导,得:

$$L \cdot L' = X_M(X_M - X_G) + Y_M(Y_M - Y_G) \quad (3)$$

令(3)式中的  $L' = 0$ , 可得  $L$  取极值( $L_{\min}$  和  $L_{\max}$ ) 的条件方程是:

$$X_M(X_M - X_G) + Y_M(Y_M - Y_G) = 0 \quad (4)$$

下面就来详细分析(4)式。

#### 2.2.1 L 取极值的运动学含义

将(4)式变形为:

$$(Y_M - Y_G) / (X_M - X_G) = -X_M / Y_M \quad (5)$$

考虑到有以下关系式:

$$\begin{cases} X_M' = dX_M / d\varphi = (dX_M / dt) \cdot (dt / d\varphi) = V_M^x / \varphi' \\ Y_M' = V_M^y / \varphi' \end{cases}$$

则(5)式可变为:

$$(Y_M - Y_G) / (X_M - X_G) = -V_M^y / V_M^x \quad (6)$$

为便于分析,将(6)式变形为:

$$[(Y_M - Y_G) / (X_M - X_G)] \cdot (V_M^x / V_M^y) = -1 \quad (7)$$

参看图 5(a) 和图 6 可得:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\varphi_M = (Y_M - Y_G) / (X_M - X_G) \\ \operatorname{tg}\varphi_V = V_M^x / V_M^y \end{cases} \quad (8)$$

比较(7)、(8)两式可得:

$$\operatorname{tg} \varphi_M \cdot \operatorname{tg} \varphi_N = -1 \quad (8)$$

(9) 式表明: 当  $L$  取极值时, 有  $\vec{L} \perp \vec{V}_M$  或  $\vec{GM} \perp \vec{V}_M$  成立。可见其运动学含义是:

(1), 当  $L$  取极值时,  $\vec{L}$  与该瞬时的速度  $\vec{V}_M$  (沿  $M$  曲线在  $M$  点的切线方向) 垂直,  $\vec{L}$  与  $M$  曲线在  $M$  点处的法线方向一致。

(2), 在图 5(a) 中, 当六杆机构的 1-2 杆组的长度  $s, t$  使(1)式取“=”号成立, 则当  $L$  取极值时, 1-2 杆重合于  $GEM$  线。若杆 2 是二力杆, 则杆 2 两端点  $E, M$  的作用力  $\vec{F}_E, \vec{F}_M$  的方向重合于  $GEM$  线; 而  $\vec{V}_E \perp \vec{GE}$ , 故有  $\vec{F}_E \perp \vec{V}_E$ 。

### 2.2.2 $L$ 取极值的运动几何学条件

参见图 5(a), 连杆 3 作平面运动, 其绝对速度瞬心  $P$  为过  $M, B, C$  并分别与  $\vec{V}_M, \vec{V}_B, \vec{V}_C$  垂直的三直线的汇交点。而杆 4 和 5 均作定轴转动, 有  $\vec{V}_B \perp \vec{AB}, \vec{V}_C \perp \vec{DC}$ , 则  $AB, DC$  的延长线必相交于点  $P$ 。由 2.2.1 知, 当  $L$  取极值时, 有  $\vec{GM} \perp \vec{V}_M$ , 则  $GM$  的延长线必过  $P$ , 如图 7 所示。

由以上分析可知,  $L$  取极值的运动几何学条件是:

$GM, AB, DC$  三直线汇交于连杆 3 的绝对速度瞬心。

### 2.3 $L_{\min}$ 与 $L_{\max}$ 的求取

这里介绍两种方法:

#### 2.3.1 解超越方程

由(4)式可知,  $L$  取极值时, 有条件方程  $F'(\varphi) = 0$ 。这里先来推导  $F(\varphi)$  的表达式。

如图 8 所示, 建立坐标系  $XOY$ , 原点  $O$  与  $A$  重合。

解  $\triangle ABC$  和  $\triangle BDC$  可得:

$$\begin{cases} f_1^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \varphi, \varphi_1 = \operatorname{tg}^{-1}[a \sin \varphi / (a \cos \varphi - d)] \\ \alpha = \cos^{-1}[(b^2 + f_1^2 - c^2) / (2bf_1)], \theta_1 = \alpha + \varphi_1 \end{cases} \quad (10)$$

$M$  和  $B$  同是连杆 3 上的点, 可得:

$$X_M = a \cos \varphi + e \cos(\alpha_0 + \theta_1), Y_M = a \sin \varphi + e \sin(\alpha_0 + \theta_1) \quad (11)$$

(11) 式对  $\varphi$  求导得:

$$X'_M = -a \sin \varphi - e \sin(\alpha_0 + \theta_1) \cdot \dot{\theta}_1, Y'_M = a \cos \varphi + e \cos(\alpha_0 + \theta_1) \cdot \dot{\theta}_1 \quad (12)$$

由图 8 可得:

$$X_C = r \cdot \cos \beta, Y_C = r \cdot \sin \beta \quad (13)$$

将(11)、(12)、(13)三式代入(4)式, 经整理可得:

$$\begin{aligned} & a f_1(\varphi) [e \sin(\alpha_0 - \varphi + \theta_1) - r \sin(\beta - \varphi)] \\ & + e f_2(\varphi) [a \sin(\varphi - \alpha_0 - \theta_1) - r \sin(\beta - \alpha_0 - \theta_1)] = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

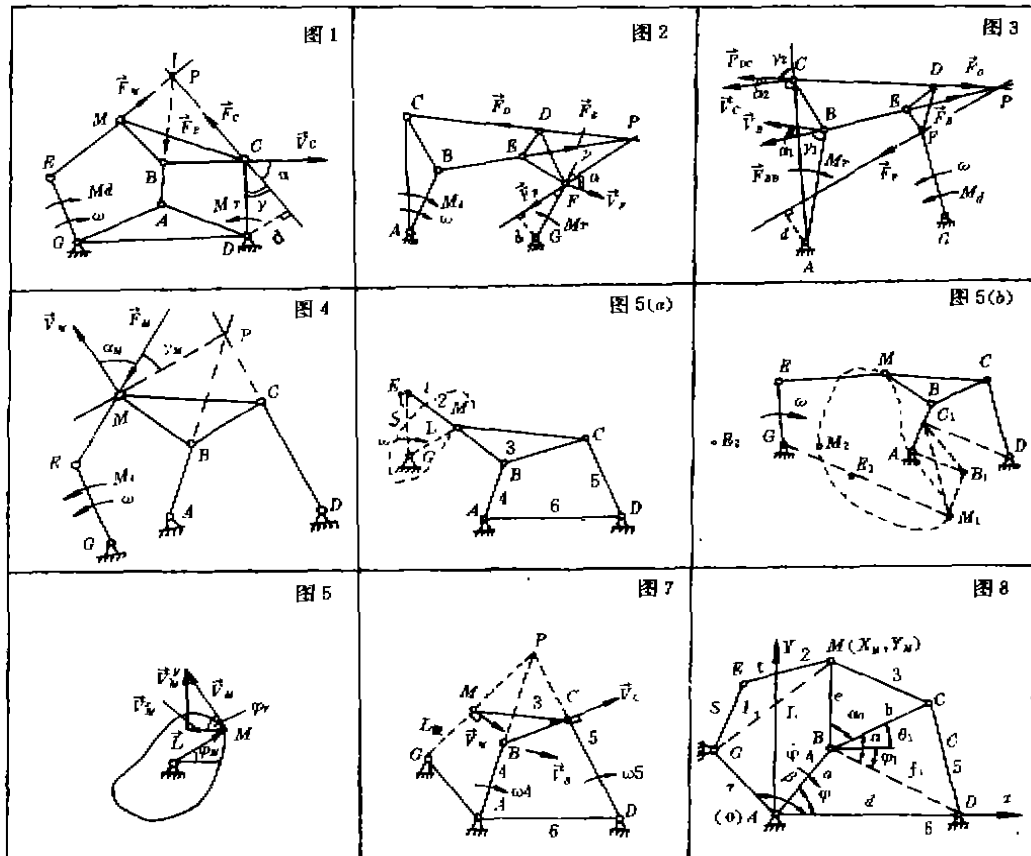
上式即等价于  $F'(\varphi) = 0$ 。

可见, (14) 式为  $\varphi$  的超越方程, 可采用迭代等方法求解, 求得满足该式的  $\varphi$  后, 代入(10)式可求得  $\theta_1$ ; 再代入(11)式, 可求得  $X_M, Y_M$ ; 最后由(2)式可求得  $L_{\max}, L_{\min}$  及其出现的位置  $\varphi_{\max}, \varphi_{\min}$ 。

#### 2.3.2 运用 $L$ 取极值的几何条件

由 2.2.2 知, 当  $L$  取极值时,  $GM, AB, DC$  三直线汇交(如图 7 所示), 根据“三直线汇交的条件是, 其一般式方程的系数行列式的值等于零”可得如下的近似计算方法。

参照图 8, 估计相应于  $L_{\min}$  和  $L_{\max}$  的  $\varphi_{\min}$  和  $\varphi_{\max}$  出现的区间  $[\varphi_0, \varphi_0]$  和  $[\varphi_0, \varphi_0]$  (它们都是  $[0, 2\pi]$  的子区间), 在每一区间内, 取适当的步长  $\Delta\varphi$ , 调用现成的机构运动分析子程序, 算出与  $\varphi$  对应的  $M, B, C$  的  $X, Y$  坐标, 并算出此时的  $GM, AB, DC$  三直线的一般式方程  $a_i X + b_i Y + c_i = 0 (i = 1, 2, 3)$  的三对系数及其行列式  $Det$  的值, 并同时与  $\varepsilon$  ( $\varepsilon$  为一很小的正数) 比较, 当  $|Det| \leq \varepsilon$  时, 就终止运算, 此时的  $\theta_1, \theta_2$  即为  $\theta_{\min}, \theta_{\max}$  的近似值, 再调用机构运动分析子程序, 可求出  $L_{\min}$  和  $L_{\max}$  的近似值。



例如:  $a = 15.0, b = 22.0, c = 30.0, d = 35.0, e = 20.0, r = 19.0, \alpha_0 = 45^\circ, \beta = 95^\circ$ .  
 采用方法 1, 编制程序, 解超越方程, 最后结果为:  $\varphi_{\min} \approx 169.3900^\circ, \varphi_{\max} \approx 292.0062^\circ$ .  
 $L_{\min} \approx .3761340E + 01, L_{\max} \approx .1951237E + 02$ .

实际上, 当  $G$  处于  $M$  点封闭轨迹之外时(如图 5(b)), 也能有曲柄存在. 这时(1)式只能取等式, 否则  $GE$  将不可能为曲柄. 但此种情况下, 当  $GM = L_{\min}$  时, 机构将出现运动不确定现象, 同时对  $GE$  及  $EM$  的尺寸精度要求很高, 否则就可能破坏“等式”条件而没有曲柄, 或造成某些构件的强制变形, 引起过大的运动副反力等。

显然, 当  $M$  点走封闭轨迹时,  $ABCD$  必为一曲柄—摇杆机构, 当该六杆机构有曲柄存在时, 其  $A, G$  都为整转副; 输出杆  $CD$  的极限位置一般即为  $ABCD$  四杆机构的极限位置, 与  $GE$ 、

$EM$  二杆的共线与否无关。

当  $M$  点的轨迹为非封闭曲线(可能是  $M$  点封闭轨迹曲线的一段,也可能  $ABCD$  为双摇杆机构)时,所构成的六杆机构也可以有曲柄存在。这时曲柄固定铰链中心  $G$  可在任意位置选取,只要满足  $(GE + EM) = (GM)_{\max}$ ;  $|GE - EM| = (GM)_{\min}$  即可。

### 3 小 结

(1) 基于四杆机构的传力特性分析方法和“平面构件受三力必汇交于一点”这一理论,讨论了几种六杆机构的传动角;鉴于 IV 级六杆机构的复杂性和特殊性,对其作了深入分析,特别提出“合力臂”这一新指标,它可用来综合评价该种机构的传力特性,也适用于其它六杆机构。

(2) 本文以 Stephenson 型六杆机构为对象,抓住运用其曲柄存在准则的关键——曲柄铰链中心到连杆铰链中心距离  $L$  的极值的求取,在详细介绍  $L$  极值的求解方法之前,特别研究了  $L$  取极值的运动学含义与运动几何学条件,并从中得出几条重要结论,这不仅有益于六杆机构的传力特性分析,而且把  $L_{\min}$ 、 $L_{\max}$  与  $\gamma_{\min}$ 、机构死点联系到一起,其意义深远。

### 参 考 文 献

- 1 邹昌平. 常用平面六杆机构的基本特性和有关运动几何学几个问题的研讨及其 CAD. 重庆大学硕士学位论文, 1990
- 2 杨基厚, 王成云. 一种 Stephenson 型六杆机构的传动角及其从动件的运动规律. 机械设计与研究, 1989, (3)