

80-86

15

域外样条边界元法(I)

An Outside-Domain Spline Boundary Element Method (I)

许明
Xu Ming

俞集辉
Yu Jihui

TM153.1

(重庆大学电气工程系)

摘要 在场域外选取辅助边界,提出了计算二维静态场的域外样条边界元法,并以实例计算说明该方法的特点和实用价值。

关键词 样条函数; 电磁场; 插值 / 边界元

样条边界元法

中国图书资料分类法分类号 TM151.1; TM153.1

ABSTRACT In this paper an outside-domain spline boundary element method for the solution of 2D static electromagnetic field problems is put forward by selecting auxiliary boundary outside the problem domain. The characteristics and practical value of the method are showed with examples of computation.

KEYWORDS spline functions; electromagnetic fields; interpolation / boundary element

0 引言

利用B样条函数良好的数值逼近性,用很少的边界单元和节点描述曲线边界和复杂的边界条件,由此而形成的样条边界元法(SBEM),保持了均匀媒质中场矢量应有的连续性,在实例计算中获得了令人满意的效果^[1]。但文献[1]中矩阵元素计算公式较复杂,这突出地反映在奇异积分项的计算上十分繁琐,如果将这个方推广应用于涡流问题,计算难度和计算量的增加将会更加明显。针对上述问题,本文拟对文献[1]的SBEM加以改进,提出域外样条边界元法(OSBEM),并以实例计算来说明它应用的特点和实用价值。

1 域外样条边界元方程

对于二维静态场问题,可归结为标量函数的泊松边值问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = f & \in \Omega \\ u|_{\Gamma_1} = u_0 \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} = q = q_0 \end{cases} \quad (\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2) \quad (1)$$

* 收文日期 1992-03-09
高等学校博士学科点专项科研基金资助课题

按加权余量法形成的相应边界积分方程为

$$C_i u_i = \int_{\Gamma} (F \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial F}{\partial n}) d\Gamma - \int_{\Omega} f F d\Omega \quad (2)$$

其中 i 是观察点 P_i 所在位置, 上式表明, Ω 域(含边界 Γ) 上任一点 P_i 的位值 u_i , 可以通过 Ω 域内场源及反映域外场源影响的边界条件积分求得. 当以二维拉普拉斯方程基本解为权函数

$$F = -\frac{1}{2\pi} \ln R \quad (3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi R} \frac{\partial R}{\partial n} \quad (4)$$

其中 R 为源点到观察点 P_i 的距离 $|\vec{R}|$, 且

$$\frac{\partial R}{\partial n} = \nabla R \cdot \vec{n} = \cos \alpha$$

α 角如图 1 中所示 α_1 . 此时, (2) 式表达简洁, 系数 C_i 易于确定, 但因观察点通常选在边界 Γ 上, R 可能为零, 这就导致了奇异积分问题. 若将 P_i 点置于 Ω 域外, 外法线方向 \vec{n} 仍取从 Ω 域向外, 如图 1 中所示, 采用 (2) 式计算, C_i 将恒为零. 将 (3)、(4) 式代入 (2) 式, 可得

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \ln R d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{u}{R} \cos \alpha d\Gamma = \int_{\Omega} f \ln R d\Omega \quad (5)$$

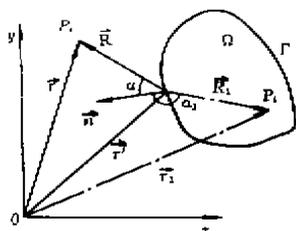


图 1 场域内外的参考点

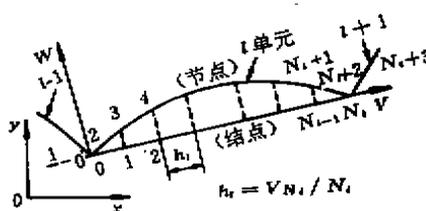


图 2 单元划分及局部坐标系

(5) 式即为域外边界积分方程, 它通过域外参考点建立了场域边界上位和位的法向导数与域内场源之间的关系, 因其中 R 恒不为零, 不再含有奇异积分的问题.

对图 1 中 Ω 域的边界 Γ 进行剖分. 设剖分得 M 个边界单元, 在第 l 号单元设立局部坐标 V_0W , 将区间 $[V_0, V_{N_i}]$ 划分为 N_i 分, 并将单元样条插值的端点条件按隐含节点计入, 则 l 单元共有 $N_i + 3$ 个计算节点, 如图 2 所示. 于是, 对于域外某一观察点 P_i , (5) 式可写为

$$\sum_{i=1}^M \int_{\Gamma_i} q \ln R d\Gamma - \sum_{i=1}^M \int_{\Gamma_i} \frac{u}{R} \cos \alpha d\Gamma = \int_{\Omega} f \ln R d\Omega \quad (6)$$

在局部坐标 V_0W 中, 可微函数 $f(V)$ 能表示为三次 B 样条插值函数^[1]

$$S_3(V) = \sum_{j=-1}^{N_i+1} c_j \varphi_j \left(\frac{V}{h_i} \right) = [\varphi \left(\frac{V}{h_i} \right)] [c]$$

式中 $\varphi_j \left(\frac{V}{h_i} \right) (j = -1, 0, \dots, N_i + 1)$ 是 l 单元上三次 B 样条基. 将型值点条件 $s_3(V_j) = f(V_j) (j = 0, 1, \dots, N_i)$ 及端点条件 $s_3'(V_i) = f'(V_i) (i = 0, N_i)$ 代入上式, 解得待定系数 $[c]$ 矩阵, 则上式可表示为

$$S_3(V) = [\varphi \left(\frac{V}{h_i} \right)] [A]^{-1} [S] \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} [\varphi(\frac{V}{h_t})] &= [\varphi_{-1}(\frac{V}{h_t}) \varphi_0(\frac{V}{h_t}) \cdots \varphi_N(\frac{V}{h_t}) \varphi_{N+1}(\frac{V}{h_t})]; \\ [S] &= [h_t^2 f(V_0) f(V_1) \cdots f(V_N) h_t^2 f(V_N)]^T; \\ [A]^{-1} &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ & a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

当端点条件取 $S_3(V_i) = f(V_i)$ 时, $a_1 = a_3 = 1, a_2 = -2$.

于是, l 单元上的位函数 u 、位的法向导数 $q = \partial u / \partial n$ 以及 l 单元的边界 Γ_i 能分别表示为如下样条插值函数

$$\begin{cases} u(V) = [\varphi(\frac{V}{h_t})][A]^{-1}[u_i] \\ q(V) = [\varphi(\frac{V}{h_t})][A]^{-1}[q_i] \\ W(V) = [\varphi(\frac{V}{h_t})][A]^{-1}[W_i] \end{cases} \quad (8)$$

相应于域外某点 P_i 有边界元离散方程

$$\sum_{i=1}^M [g_i][q_i] - \sum_{i=1}^M [c_i][u_i] = B_i \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} [q_i] &= [q_{i,-1} \ q_{i,0} \ \cdots \ q_{i,N_i} \ q_{i,N_{i+1}}]^T; \\ [u_i] &= [u_{i,-1} \ u_{i,0} \ \cdots \ u_{i,N_i} \ u_{i,N_{i+1}}]^T; \\ [g_i] &= [g_{i,-1} \ g_{i,0} \ \cdots \ g_{i,N_i} \ g_{i,N_{i+1}}]^T; \\ [c_i] &= [c_{i,-1} \ c_{i,0} \ \cdots \ c_{i,N_i} \ c_{i,N_{i+1}}]^T; \\ g_{i,k} &= \sum_{n=-1}^{N_i+1} \left(\sum_{m=0}^{N_i-1} \int_{V_m}^{V_{m+1}} \varphi_n(\frac{V}{h_t}) \cdot \ln R \cdot \sqrt{1+w'^2(V)} dV \right) \cdot a_{nk} \\ c_{i,k} &= \sum_{n=-1}^{N_i+1} \left(\sum_{m=0}^{N_i-1} \int_{V_m}^{V_{m+1}} \varphi_n(\frac{V}{h_t}) \cdot \frac{\cos \alpha}{R} \cdot \sqrt{1+w'^2(V)} dV \right) \cdot a_{nk} \\ B_i &= \sum_{n=1}^{M_1} \int_{\Omega_n} f \cdot \ln R d\Omega \end{aligned}$$

式中 a_{nk} 是 $[A]^{-1}$ 中第 n 行第 k 列元素, M_1 为 Ω 域中含源子域剖分的三角单元总数.

选择与边界节点未知量总数相同的域外观察点 $P_i (i = 1, 2, \dots, NN)$, 可以得到 NN 个形如(9)式的边界元方程, 将它们联立写成矩阵方程

$$GQ - CU = B \quad (10)$$

代入边界条件和端点条件, 整理后就得到 NN 阶域外样条边界元方程

$$AX = F \quad (11)$$

2 几个有关问题

2.1 域外辅助边界的选择

域外观察点位置选择的方式不同,其对应的边界元方程将有不同特点。为使观察点选择方便,易于为人们掌握,本文采用了 Kupradze 法^[2]。

若场域 Ω 的边界 Γ 划分为 M 个单元,每一单元确定 $N_i + 1$ 个节点,按照 Kupradze 方法,在 Ω 域外取一与 Γ 相似的辅助边界 Γ_1 ,边界单元 l 到对应辅助边界段的垂直距离为 d_l ,在辅助边界段上也相应确定 $N_i + 1$ 个节点作为域外观察点 P_i ,如图 3 所示。

d_l 的取值将直接影响到计算的精度。若 d_l 取值远小于 h_i ,在某一单元处会因 R 过小而使(6)式中某些项产生过大的数,某些项产生过小的数,导致运算误差增大。若 d_l 取得比 h_i 大得多,对辅助边界的建立就不利。实例计算表明,当 $h_i/2 \leq d_l \leq h_i$ 时,既便于作出辅助边界,又能得到较好的计算精度。

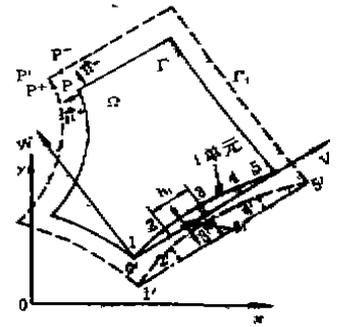


图 3 区域边界和域外观察点

2.2 关于边界角点问题

在边界角点处因位函数法向偏导数不连续而出现有两个法向偏导数值,这就有可能增加未知量的个数。设边界角点 P 处位的法向偏导数都是未知量,我们可以在辅助边界对应角点 P' 处两侧附近分别设置观察点 P^+ 和 P^- ,随未知量增加的数目而增加相应数目的边界元方程,如图 3 所示。于是角点问题得以方便而自然的解决。

2.3 单元插值端点条件的设置

单元样条函数插值,必须给出端点条件,而这一条件常常难于解析求出,需作近似处理。文献[1]中采用了自然端点条件,即令 $q'(V_0) = q'(V_N) = 0$,这样设置计算精度较差,本文采用延伸处理方法。在图 4 中将单元区间 $[V_0, V_N]$ 端点向左、向右分别延伸到 V_{-1} 和 V_{N+1} ,令

$$\lambda = \frac{V_0 - V_{-1}}{V_1 - V_{-1}} = \frac{V_N - V_{N+1}}{V_{N-1} - V_{N+1}}$$

则有: $V_{-1} = \frac{V_0 - \lambda V_1}{1 - \lambda}, V_{N+1} = \frac{V_N - \lambda V_{N-1}}{1 - \lambda}$

然后再令 $q'(V_{-1}) = q'(V_{N+1}) = 0$ 。计算中,本文取 $\lambda = 1/2$,算得(7)式 $[A]^{-1}$ 矩阵中元素 $a_1 = -2, a_2 = 1, a_3 = 0$ 。实例计算表明,延伸处理方法比自然端点条件处理方法有利于提高计算精度。

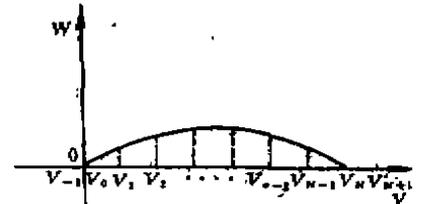


图 4 延伸的单元区间

3 分区均匀媒质中的域外边界元法

在媒质参数分别为 β_1 和 β_2 的子域 Ω_1 和 Ω_2 中,用 u_1 和 u_2 分别表示它们的位函数, Γ_c 为两子域的分界线,外边界为 $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$,如图 5 所示。

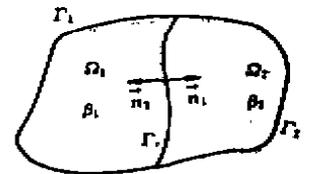


图 5 分区均匀媒质区域

将分界面上的交界面条件 $u_1 = u_2 = u_c, \beta_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = -\beta_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_2} = q_c$ 分别作为 Ω_1 和 Ω_2 域在 Γ_c 上的边界条件,设 $\Gamma_1 = \Gamma_1 + \Gamma_c, \Gamma_2 = \Gamma_2 + \Gamma_c$,可以分区建立两个边值问题。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = f_1/\beta_1 \quad \in \Omega_1 \\ u_1 = u_{s1} \quad \in \Gamma_1 \\ \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = q_1 = \frac{1}{\beta_1} q_{s1} \quad \in \Gamma_1 \\ u_1 = u_c, \quad \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = q_1 = \frac{1}{\beta_1} q_c \quad \in \Gamma_c \end{array} \right. \quad (12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = f_2/\beta_2 \quad \in \Omega_2 \\ u_2 = u_{s2} \quad \in \Gamma_2 \\ \frac{\partial u_2}{\partial n_2} = q_2 = \frac{1}{\beta_2} q_{s2} \quad \in \Gamma_2 \\ u_2 = u_c, \quad \frac{\partial u_2}{\partial n_2} = q_2 = \frac{1}{\beta_2} q_c \quad \in \Gamma_c \end{array} \right. \quad (13)$$

为分析问题方便, 设 $f_1 = f_2 = 0$, 对应于(12)和(13)式, 有边界积分方程

$$\int_{\Gamma_1} \frac{u_1}{R} \frac{\partial R}{\partial n_1} d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \frac{u_1}{R} \frac{\partial R}{\partial n_1} d\Gamma = \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u_1}{\partial n_1} \ln R d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \frac{\partial u_1}{\partial n_1} \ln R d\Gamma \quad (14)$$

$$\int_{\Gamma_2} \frac{u_2}{R} \frac{\partial R}{\partial n_2} d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \frac{u_2}{R} \frac{\partial R}{\partial n_2} d\Gamma = \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u_2}{\partial n_2} \ln R d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \frac{\partial u_2}{\partial n_2} \ln R d\Gamma \quad (15)$$

对子域 Ω_1 和 Ω_2 的边界进行剖分, 设 Γ_1 分为 M_1 个单元, N_1 个节点; Γ_2 分为 M_2 个单元, N_2 个节点; Γ_c 分为 M_c 个单元, N_c 个节点. 通过单元样条插值, 按照前面的方法可建立域外边界元方程

$$C_1 U_1 + C_1 U_c = G_1 Q_1 + G_{1c} + Q_c \quad (16)$$

$$C_2 U_2 + C_2 U_c = G_2 Q_2 + G_{2c} + Q_c \quad (17)$$

其中 U_1, Q_1 和 U_2, Q_2 分别为 Ω_1 区和 Ω_2 区在 Γ_c 上的位和位的法向偏导数矩阵. 将 Γ_c 上的交界面条件 $U_1 = U_2 = U_c$ $\beta_1 Q_1 = -\beta_2 Q_2 = Q_c$ (18)

代入(16)和(17)式, 将这两式联立

$$\begin{bmatrix} C_1 & Q \\ O & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & G_{1c} & -C_1 & O \\ O & -G_2 & -C_2 & G_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ U_c \\ Q_c \end{bmatrix} \quad (19)$$

即得分区均匀媒质中的域外样条边界元方程. 其中 $G_1 = G_{1c}/\beta_1, G_2 = G_{2c}/\beta_2$.

4 算例分析

4.1 计算定解问题 1

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 u = 0 \quad \in \Omega \\ u(x, 0) = \cos \frac{\pi}{6} x, \quad u(x, 6) = e^x \cos \frac{\pi}{6} x, \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=6} = 0 \end{array} \right.$$

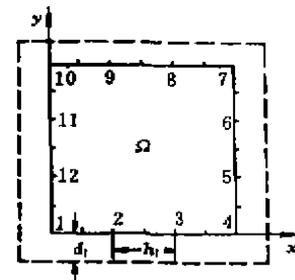


图 6 区域边界及辅助边界划分

以角点为单元端点,将图 6 的场域边界分为 4 个单元,每单元 4 个节点作样条插值,取 $d_1 = h_1/2$ 作辅助边界。将本文 OSBEM 与 24 节点 LBEM 以及总体自由度为 7×7 的有限元法计算结果误差列于表 1 中进行比较。表中 e_u 和 e_{σ} 分别表示位和场强 x 分量的总体计算误差,在 cpu 时间(VAX-1 微机)基本相同情况下,OSBEM 比 LBEM 的计算精度高出近一个数量级。

表 1 计算误差比较

计算方法		e_u %	e_{σ} %	ϵ/δ
OSBEM	(4 节点单元)	0.3105	1.0820	4.10
LBEM	(24 单元)	1.6370	16.4685	3.92
	1 阶	1.0830	19.8500	
FEM ^[1]	2 阶	0.3012	14.9200	
	3 阶	0.2517	5.70200	

4.2 计算定解问题 2

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & \in \Omega_1 + \Omega_2 \\ u|_{x=0} = u|_{x=6} = u|_{y=0} = 0 \\ u(x,6) = \sin \frac{\pi}{6} x \end{cases}$$

媒质参数 $\epsilon_2 = \epsilon_0, \epsilon_1 = 20\epsilon_0$.

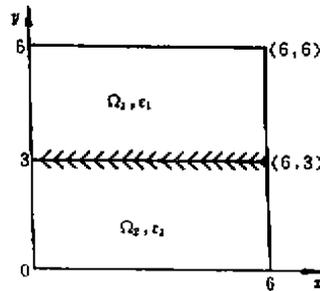


图 7 分区均匀媒质场域

以角点为单端点对图 7 场区进行边界和分界线单元剖分,每个单元按等距划分为 4 个节点,取 $d_1 = h_1/2$ 分区建立域外辅助边界 Γ 和 Γ' ,如图 8 所示。按本文方法计算的总体

误差列于表 2 中,媒质分界线上位的法向偏导数值列在表 3 内。可见初略剖分后的计算精度仍比较高,分界面交界条件能很好满足。

表 3 媒质分界线上位法向偏导数

节点	坐标 (x, y)	计算值	解析值	e_{σ} %
8	(4.0, 3.0)	0.1922392	0.1876579	2.4413
9	(2.0, 3.0)	0.1922307	0.1876579	2.4368
14	(2.0, 3.0)	-0.0096120	-0.0093290	3.0335
15	(4.0, 3.0)	-0.0096115	-0.0093290	3.0280

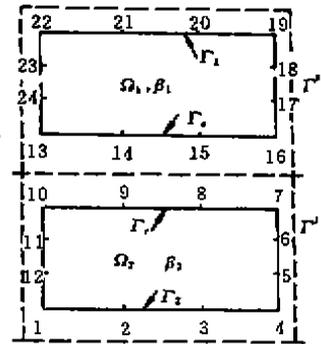


图 8 场域边界及辅助边界单元剖分

表 2 计算误差

计算方法	e_u %	e_{σ} %	e_{σ} %
OSBEM	0.6717	2.6155	2.6552

4.3 求介质中电位分布的算例

如图 9(a) 所示同轴电缆, $R_1 = 5 \text{ mm}$, $R_2 = 10 \text{ mm}$, $U = 100 \text{ V}$, 求介质中电位分布。由场分布的对称性, 可取图 9(a) 中八分之一为计算区域, 对应边值问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & \in \Omega \\ u|_{r=5} = 100, u|_{r=10} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{r=0} = \frac{\partial u}{\partial n}|_{r=10} = 0 \end{cases}$$

按角点将 Ω 域边界分为四个单元, 每单元 3 节点, 按 $d_i = h_i$ 取域外辅助边界 Γ_i , 如图 9(b) 所示。表 4 列出了计算误差比较情况, 可见采用初略剖分, 对于曲线边界问题本文方法运用也很成功。

表 4 计算误差比较

计算方法	$\epsilon_e\%$	$\epsilon_m\%$
OSBEM(3 节点单元)	0.3179	0.4024
LBEM(16 单元)	2.1849	1.7328

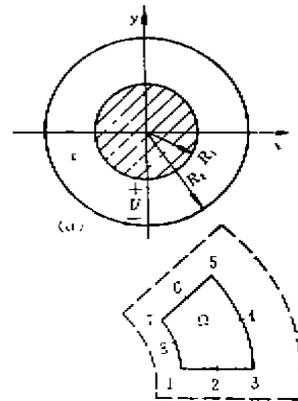


图 9 同轴电缆剖面及其计算区域边界剖分

5 结束语

本文提出的计算二维电磁场的域外样条边界元法, 既保持了文献[1]SBEM 计算精度高, 场量整体逼近性好等优点, 又具有算式简洁, 计算量小, 便于掌握等长处, 是一种值得推广应用的计算方法。

参 考 文 献

- 1 甘建学, 江泽佳, 俞泉辉. 电磁场计算中的样条边界元法. 重庆大学学报, 1991, 14(3): 1~8
- 2 Kupradze V D. Potential methods in the theory of elasticity. London, Oldbourn Press, 1965
- 3 李岳生, 齐东旭. 样条函数方法. 北京: 科学出版社, 1979
- 4 Brebbia C A. The Boundary Element Method for Engineers. London, Pentech Press, 1978