1993年11月 重庆大学学报 Vol.16,№.6
第16卷第6期 JOURNAL OF CHONGQING UNIVERSITY Nov.1993

(21)

排队系统 M/M/·的平均忙期*

120-124

The Mean Busy Period of the Queuing system M/M/·

O226

孙荣恒
Sun Rongheng
(重庆大学系统工程及应用数学系,重庆,630044)

摘 要 讨论了排队系统 M/M/·的忙期并给出了它的表达式

$$E(B)=\frac{1}{\lambda_0}\left(\frac{1}{\pi_0}-1\right)$$

关键词 M/M/·;忙期;繁忙期
中国图书资料分类法分类号 O 226

排队,平均忙期

ABSTRACT The busy period of the queueing system M/M/· was discussed and the expression was given as following:

$$E(B)=\frac{1}{\lambda_0}\left(\frac{1}{\pi_0}-1\right)$$

where E(B) is the mean busy period of the system M/M/·, π_0 is the stationary probability when the system M/M/· is at the zero state, and λ_0 is the input rate when the system M/M/· is at the zero state.

KEYWORDS M/M/·; busy period; very bury period

1 引 言

排队系统 M/M/·是指:1)系统中服务台个数可以为任意正整数,也可以为∞;2)顾客到达间隔时间序列为相互独立随机变量序列,每个到达间隔时间都服从指数分布,其参数是系统状态(即系统中的顾客数)的函数;3)所有服务台独立工作且任一服务台对任一顾客的服务时间均服从参数为 μ 的指数分布,而且与到达间隔时间序列相互独立。因此,排队系统 M/M/·包含了[2]的损失制系统 M/M/n、系统 M/M/∞、等待制系统 M/M/n、混合制系统 M/M/n/N 和有限源随机服务系统(机器看管问题),对这五类系统关于忙期的讨论很少,除了等待制系统 M/M/1(作为等待制系统 M/G/1的特例)已有关于忙期的分布及其前两阶矩、在一个忙期服务完顾客数的分布及其前两阶矩的结果外,对其它的系统基本上还没有实用的结果。本文利用生灭过程给出系统 M/M/·的忙期平均值 $E(B)$ 与其平稳分布 $\{\pi_i, i\geq 0\}$ 中概率 π_0 之间的关系式:

* 收文日期 1992-04-13

$$E(B)=\frac{1}{\lambda_0}\left(\frac{1}{\pi_0}-1\right)$$

以及其它一些结果。

忙期记为 B，它是指：从系统中开始有一个顾客时起，一直到系统中又没有顾客时止这段时间。繁忙期记为 A，它是指：从系统中所有服务台都进入服务时起一直到系统有一个服务台空闲止这段时间。显然，当系统中只有一个服务台时，繁忙期就是忙期；当系统中有无穷多个服务台时，繁忙期无定义。如果某时刻系统中有 i 个顾客，我们就说该时刻系统状态为 i。

2　几个引理

引理 1　设 α_i 表示系统由变为状态 i 时起到下一个到达时止这段时间，β_i 表示系统由变为状态 i 时起到下一个离开时止这段时间，则

1) α_i 服从参数为 λ_i 的指数分布，$i\geqslant 0$。

2) β_i 服从参数为 μ_i 的指数分布，$i\geqslant 1$。

3) α_i 与 β_i 相互独立。

证明 1)：因为 α_i 是顾客到达间隔时间，由假设 α_i 服从指数分布，且其参数是系统状态 i 的函数，故可记为 λ_i。

证明 2)：因为系统中每个服务台的服务时间相互独立均服从参数为 μ 的指数分布。设系统中有 $n(1\leqslant n\leqslant\infty)$ 个服务台，其服务时间分别以 $V_1\cdots V_n$ 表示，由指数分布的无记忆性知。

$$\beta_i=\begin{cases}\min(V_1,\cdots,V_n), & i\geqslant n\\ \min(V_1,\cdots,V_i), & i<n\end{cases}$$

又因 $\min(V_1,\cdots,V_j)$ 服从参数为 $j\mu$ 的指数分布，所以 β_i 服从指数分布，其参数为

$$\mu_i=\begin{cases}n\mu, & i\geqslant n\\ i\mu, & i<n\end{cases}$$

由假设 3) 是显然的。

引理 2　排队系统 $M/M/\cdot$ 的状态过程 $\{\xi(t),t\geqslant 0\}$ 是生率为 λ_i，灭率为 μ_i 的生灭过程。且当

$$R\triangleq\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_i}+\sum_{k=0}^{i-1}\frac{\mu_i\mu_{i-1}\cdots\mu_{i-k}}{\lambda_i\lambda_{i-1}\cdots\lambda_{i-k-1}}\right)=\infty$$

$$e_1\triangleq\frac{1}{\mu_1}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{k+1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{k+2}}<\infty$$

时，$\{\xi(t),t\geqslant 0)\}$ 的平稳分布存在唯一，且为 $\pi_j=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j+1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}\pi_0,j\geqslant 0,\pi_0$ 由 $\pi_0+\sum_{j=1}^{\infty}\pi_j=0$ 确定。

证明见[1] § 5.5 定理 4.

引理 3　设 W_j 为排队系统 $M/M/\cdot$ 的状态由转移到 j 起首次回到状态 0 所花的时间，记 $\omega_j=E(W_j)$，则当

$\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i<\infty$，　$\sup_{j\geqslant 0}\{\lambda_j\}<\infty$ 时，有

$$\omega_j=\sum_{i=1}^{\infty}\rho_i+\sum_{m=1}^{j-1}\left(\prod_{k=1}^{m}\frac{\mu_k}{\lambda_k}\right)\sum_{i=m+1}^{\infty}\rho_i, j\geqslant 1$$

其中
$$\rho_1=\frac{1}{\mu_1},\rho_i=\frac{\lambda_1\lambda_2\cdots,\lambda_{i-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_i},i\geqslant 2$$

证明 因为从系统转移到状态 j 时起，经过 $\min(\alpha_j,\beta_j)$ 时间后其状态依概率为 1 要发生变化，或者 $j\to j+1$ 或 $j\to j-1$，再由指数分布的性质和全期望公式得

$$\begin{aligned}\omega_j=&E[\min(\alpha_j,\beta_j)]+E[W_j|\alpha_j<\beta_j]P\{\alpha_j<\beta_j\}\\&E[W_j|\alpha_j>\beta_j]P\{\alpha_j>\beta_j\}\\=&\frac{1}{\lambda_j+\mu_j}+\frac{\lambda_j}{\lambda_j+\mu_j}\omega_{j+1}+\frac{\mu_j}{\lambda_j+\mu_j}\omega_{j-1},j\geqslant 1\end{aligned}$$

即
$$\omega_{j+1}-\omega_j=-\frac{1}{\lambda_j}+\frac{\mu_j}{\lambda_j}(\omega_j-\omega_{j-1}),j\geqslant 1$$

因为 $\omega_0=0$，所以由上式递推得

$$\omega_{j+1}-\omega_j=-\frac{1}{\lambda_j\rho_j}\sum_{i=1}^{j}\rho_i+\frac{1}{\lambda_j\rho_j}\omega_1 \qquad (*)$$

因为 $\omega_{j+1}>\omega_j$，所以，$\omega_1>\sum_{i=1}^{j}\rho_i$，故当 $\sum_{i=1}^{\infty}\rho_i=\infty$ 时，对任意正整数 j，有 $\omega_j\geqslant\omega_1=\infty$. 当 $\sum_{i=1}^{\infty}\rho_i<\infty$ 时，记 $Z_n=\omega_{n+1}-\omega_n,n\geqslant 0,u_n=\frac{Z_n\lambda_1\lambda_1\cdots\lambda_n}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n},n\geqslant 1,u_0=z_0=\omega_1$.

则有 $z_n=-\frac{1}{\lambda_n}+\frac{\mu_n}{\lambda_n}z_{n-1},n\geqslant 1$

$$\frac{\mu_1\cdots\mu_n}{\lambda_1\cdots\lambda_n}u_n=z_n=-\frac{1}{\lambda_n}+\frac{\mu_1\cdots\mu_n}{\lambda_1\cdots\lambda_n}u_{n-1}$$

$u_n-u_{n-1}=-\frac{1}{\lambda_n}\cdot\frac{\lambda_1\cdots\lambda_n}{\mu_1\cdots\mu_n}=-\rho_n<0,n\geqslant 1$，从而 $u_{n-1}>u_n\geqslant 0,n\geqslant 1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 存在。又因

$$u_0-u_1=\rho_1,u_1-u_2=\rho_2,\cdots,u_{n-1}-u_n=\rho_n,\cdots,$$

所以 $u_0-u_n=\sum_{i=1}^{n}\rho_i$，从而 $\omega_1=u_0=\lim\limits_{n\to\infty}u_n+\sum_{i=1}^{\infty}\rho_i<\infty$

又因 $\sup\limits_{j\geqslant 0}\{\lambda_j\}<\infty,u_n=\lambda_nZ_n\rho_n,\sum_{i=1}^{\infty}\rho_i<\infty$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n=0$，且由[5]知系统 $M/M/\cdot$ 是遍历齐次不可约马氏链，故其状态都是正常返的，从而对任意正整数 n，有 $0<\omega_n<\infty$，又 $\omega_{n+1}=\sum_{i=0}^{n}Z_i,Z_i>0,i=1,2,\cdots$，故 $\sup\limits_{j\geqslant 1}\{Z_j\}<\infty$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，于是 $\omega_1=\sum_{i=1}^{\infty}\rho_i$.

由(*)式得 $\omega_{j+1}-\omega_j=\frac{1}{\lambda_j\rho_j}\sum_{i=j+1}^{\infty}\rho_i=\prod_{k=1}^{j}\frac{\mu_k}{\lambda_k}\sum_{i=j+1}^{\infty}\rho_i$.

故
$$\omega_j=\prod_{k=1}^{j-1}\frac{\mu_k}{\lambda_k}\sum_{i=j}^{\infty}\rho_i+\omega_{j-1}$$

递推得
$$\omega_j=\sum_{j=1}^{\infty}\rho_i+\sum_{m=1}^{j-1}\left(\prod_{k=1}^{m}\frac{\mu_k}{\lambda_k}\right)\sum_{j=m+1}^{\infty}\rho_i$$

3 主要结果

定理 1 对于排队系统 M/M/·，当 $R=\infty, \sum_{i=1}^{\infty}\rho_i<\infty$ 时，其平均忙期为 $E(B)=\frac{1}{\lambda_0}\left(\frac{1}{\pi_0}-1\right)$.

证明 因为 $E(B)=\omega_1=\sum_{i=1}^{\infty}\rho_i=\frac{1}{\lambda_0}\left[\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{i-1}}{\mu_1\cdots\mu_i}\right]=\frac{1}{\lambda_0}\left[\frac{1}{\pi_0}-1\right]$.

其中 $\pi_0=\left[1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{i-1}}{\mu_1\cdots\mu_i}\right]^{-1}$. 当系统状态空间为有限时，上述的求和上限均应换为有限正整数。

定理 2 排队系统 $M/M/\cdot$ 的平均操作周期(即状态 0 平均首次返回时间) 为

$$E(B+I)=\frac{1}{\lambda_0\pi_0}$$

证明 因为系统经过 a_0 时间后必由状态 0 转移到状态 1，而由状态 1 经过 W_1 时间后回到状态 0，所以由定理 1 得

$$E(a_0+W_1)=\frac{1}{\lambda_0}+\frac{1}{\lambda_0}\left(\frac{1}{\pi_0}-1\right)=\frac{1}{\lambda_0\pi_0}$$

定理 3 对具有 n 个服务台的排队系统 $M/M/n$，当 $R=\infty, \sum_{i=1}^{\infty}\rho_i<\infty$ 时，其平均繁忙期为 $E(A)=\frac{1}{\mu_n}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_n\lambda_{n+1}\cdots\lambda_{n+i-1}}{\mu_n\mu_{n+1}\cdots\mu_{n+i}}, n<\infty$.

证明 由 $E(A)=\omega_n-\omega_{n-1}$ 可立得 $E(A)=\frac{1}{\mu_n}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_n\lambda_n+1\cdots\lambda_{n+i-1}}{\mu_n\mu_{n+1}\cdots\mu_{n+i}}$.

4 例子与应用

由[2]可知：

1) 对于损失制系统 M/M/n，因为

$$\begin{cases}\lambda_j=\lambda, j=0,1,\cdots,n-1\\ \mu_j=j\mu, j=1,2,\cdots,n\end{cases}\qquad \pi_0=\left[\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j\right]^{-1}$$

所以，$E(B)=\frac{1}{\lambda}\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j-\frac{1}{\lambda}, E(A)=\frac{1}{n\mu}, E(B+I)=\frac{1}{\lambda}\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j$

2) 对于系统 $M/M/\infty$，因为

$$\begin{cases}\lambda_j=\lambda, j=0,1,2,\cdots\\ \mu_j=j\mu, j=1,2,\cdots\end{cases},\quad \pi_0=e^{-\lambda/\mu}$$

所以 $E(B)=\frac{1}{\lambda}(e^{\lambda/\mu}-1), E(B+I)=\frac{1}{\lambda}e^{\lambda/\mu}$.

3) 对于等待制系统 $M/M/n$，因为

$$\begin{cases}\lambda_j = \lambda, j = 0,1,2,\cdots \\ \mu_j = \begin{cases} j\mu, j = 1,2,\cdots,n-1 \\ n\mu, j = n,n+1,\cdots \end{cases}\end{cases}, \quad \pi_0 = \left[\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(n\rho)^j}{j!} + \frac{(n\rho)^n}{n!(1-\rho)}\right]^{-1}, \rho = \frac{\lambda}{n\mu} < 1$$

所以，$E(B) = \frac{1}{\lambda}\left[\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(n\rho)^j}{j!} + \frac{(n\rho)^n}{n!(1-\rho)} - 1\right], E(A) = \frac{1}{n\mu - \lambda},$

$$E(B+I) = \frac{1}{\lambda}\left[\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(n\rho)^j}{j!} + \frac{(n\rho)^n}{n!(1-\rho)}\right]$$

特别，对于 $n = 1$ 的系统 $M/M/1$，有 $E(B) = E(A) = \frac{1}{\mu - \lambda}, E(B+I) = \frac{\mu}{\lambda(\mu - \lambda)}$.

4) 对于混合制系统 $M/M/n/N, N \geqslant n$，因为

$$\begin{cases}\lambda_j = \lambda, j = 0,1,2,\cdots N-1 \\ \mu_j = \begin{cases} j\mu, j = 1,2,\cdots,n-1 \\ n\mu, j = n,n+1,\cdots N \end{cases}\end{cases} \quad \pi_0 = \left[\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(n\rho)^j}{j!} + \sum_{j=n}^{N}\frac{(n\rho)^j}{n!n^{j-n}}\right]^{-1}, \rho = \frac{\lambda}{n\mu} < 1$$

所以，$E(B) = \frac{1}{\lambda}\left[\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(n\rho)^j}{j!} + \sum_{j=n}^{N}\frac{(n\rho)^j}{n!n^{j-n}} - 1\right], E(A) = \frac{1-\rho^{N+1-n}}{1-\rho}\cdot\frac{(n-1)!}{\mu n^n}$

$$E(B+I) = \frac{1}{\lambda}\left[\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(n\rho)^j}{j!} + \sum_{j=n}^{N}\frac{(n\rho)^j}{n!n^{j-n}}\right]$$

5) 对于 n 个工人看管 $m(m \geqslant n)$ 台机器问题，因为

$$\begin{cases}\lambda_j = (m-j)\lambda, j = 0,1,\cdots m-1 \\ \mu_j = \begin{cases} j\mu, j = 1,2,\cdots,n-1 \\ n\mu, j = n,n+1,\cdots m \end{cases}\end{cases}, \quad \pi_0 = \left[\sum_{j=0}^{n}\binom{m}{j}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j + \sum_{j=n+1}^{m}\binom{m}{j}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j\frac{j!}{n!n^{j-n}}\right]^{-1}$$

所以，$E(B) = \frac{1}{m\lambda}\left[\sum_{j=0}^{n}\binom{m}{j}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j + \sum_{j=n+1}^{m}\binom{m}{j}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j\frac{j!}{n!n^{j-n}} - 1\right]$

$$E(A) = \frac{1}{n\mu}\sum_{j=0}^{m-n}A_{m-n}^{j}\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^j$$

其中 A_{m-n}^{j} 为从 $m-n$ 个不同元素中取 j 个的选排列种数。

$$E(B+I) = \frac{1}{m\lambda}\left[\sum_{j=0}^{n}\binom{m}{j}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j + \sum_{j=n+1}^{m}\binom{m}{j}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j\frac{j!}{n!n^{j-n}}\right]$$

参考文献

1 王梓坤. 生灭过程与马尔柯夫链. 北京：科学出版社，1980

2 徐光辉. 随机服务系统. 北京：科学出版社，1980

3 华兴. 排队论与随机服务系统. 上海：上海翻译出版社，1987

4 Boxme O J, Syskl R. Queueing Theory and Its Applications. North-Holland, 1988

5 Cohen J W. The single server gueue. NORTH-HOLAND PUBLISHING COMPANY AMSTERDAM-NEW YORK, OXFORD, 1982, 64～65