75~77

14

Ekeland变分原理的一个注记及应用*

A Remark on Ekeland's Variational Principle and Its Application

何传江
He Chuanjiang
（重庆大学系统工程及应用数学系，重庆，630044）

摘　要　给出Ekeland变分原理的一个推论，并据此简单地证明几个熟知定理。

关键词　Ekeland变分原理；山路引理；(PS)条件；强制性　E变分原理
中国图书资料分类法分类号　O 177.91　O176

ABSTRACT　A corollary of Ekeland's variational principle is given. As its application, several well-known theorems are simply proved.

KEYWORDS　Ekeland's variational principle; mountain pass lemma; (PS) condition; coercivity

本文的主要结果如下：

定理1　设 X 是实Banach空间，$F\in C^1(X,R)$，如果对 $\forall\ \varepsilon>0$，存在 $x_0\in X$，使 $F(x_0)<C+\varepsilon$，则存在 $x_\varepsilon\in\overline{F}_\varepsilon\cap\overline{U}$，使得

$$F(x_\varepsilon)<C\qquad 或者\qquad \|F'(x_\varepsilon)\|\leqslant\sqrt{\varepsilon}\tag{1}$$

成立，其 U 为含 x_0 的任一开集，$F_\varepsilon=\{x\in X\,|\,F(x)<C+\varepsilon\}$ 和 $C\in R$.

该定理的证明要用到Ekeland变分原理。

Ekeland变分原理　设 V 是完备度量空间，$F:V\to R\cup\{+\infty\}$ ($F\not\equiv+\infty$) 是下半连续函数且下方有界，则对满足 $F(x_0)<\inf\limits_V F+\varepsilon$ 的 $\varepsilon>0$ 及 $x_0\in V$，如下结论成立：对 $\forall\ \lambda>0$，存在 $x_\lambda\in V$，使得

$$\begin{gathered}F(x_\lambda)\leqslant F(x_0),\ d(x_\lambda,x_0)\leqslant\lambda\\ \forall\ x\neq x_\lambda,\ F(x_\lambda)<F(x)+\frac{\varepsilon}{\lambda}d(x,x_\lambda)\end{gathered}\tag{2}$$

关于Ekeland变分原理，可参见文献[1～2].

定理1的证明：假设(1)式前一部分不成立，即对 $\forall\ x\in\overline{F}_\varepsilon\cap\overline{U}$，均有 $F(x)\geqslant C$，根据Ekeland变分原理（取 $\lambda=\sqrt{\varepsilon}$），存在 $x_\varepsilon\in\overline{F}_\varepsilon\cap\overline{U}$，使得

$$\begin{gathered}F(x_\varepsilon)\leqslant F(x_0),\ \|x_\varepsilon-x_0\|\leqslant\sqrt{\varepsilon},\\ F(x_\varepsilon)\leqslant F(x)+\sqrt{\varepsilon}\,\|x-x_\varepsilon\|,\ \forall\ x\in\overline{F}_\varepsilon\cap\overline{U}\end{gathered}\tag{3}$$

* 收文日期　1992－06－92
本文得到重庆大学青年科研基金资助

显然当 $\varepsilon > 0$ 充分小时，$x \in F_\varepsilon \cap U$，从而，对 $\forall\, h \in X$ 及充分小的 $t > 0$，$x_\varepsilon \pm th \in F_\varepsilon \cap U$，在(3) 中取 $x = x_\varepsilon + th$. 则有

$$F(x_\varepsilon) \leqslant F(x)(x_\varepsilon \pm th) + \sqrt{\varepsilon} + \|h\|$$

这表明 $\|F'(x_\varepsilon)\| \leqslant \sqrt{\varepsilon}$，即(1) 后一部分成立。证毕。

下列定理 2-4，都是众所周知的一些结果，可用定理 1 很简单地证明。

定理 2　设 $F \in C'(X,R)$，下方有界，满足(PS) 条件，则存在 $x_0 \in X$，使得

$$F(x_0) = \inf_X F \qquad 且 \qquad F'(x_0) = 0$$

证明　对 $\forall\, \varepsilon > 0$，显然存在 $\bar{x} \in x$，使得 $F(\bar{x}) < \inf\limits_X F + \varepsilon$，取 $U = X$ 及 $C = \inf\limits_X F$，由定理 1 知，存在 $x_\varepsilon \in X$，使得

$$\inf_X F \leqslant F(x_\varepsilon) < \inf_X F + \varepsilon$$
$$\|F'(x_\varepsilon)\| \leqslant \sqrt{\varepsilon}$$

根据(PS) 条件，存在(x_ε)的子列(仍记为本身)，使得 $x_\varepsilon \to x_0 \in X$，显然 $F(x_0) = \inf F$ 且 $F'(x_0) = 0$. 证毕。

定理 3(Mountain Pass 定理的推广)[3]　设 $F \in C'(X,R)$ 满足(PS) 条件，如果

$$\inf_{\|x\|=\rho} F(x) \geqslant F(0) > F(e) \tag{4}$$

其中 $0 < \rho < \|e\|$，则 F 有异于 o 和 e 的临界点 x_0.

证明　记 $\Gamma = \{h \in C([0,1],X) \mid h(0) = 0, h(1) = e\}$，对 $\forall\, h \in \Gamma$，显然有

$$\max_{t\in[0,1]} F(h(t)) \geqslant \max\{F(o), F(e)\} = F(0)$$

从而

$$c = \inf_{h\in\Gamma} F \max_{t\in[0,1]} F(h(t)) \geqslant F(o)$$

分两种情况：

1) 当 $c > F(o)$ 时，按照山路引理的证明即知 c 为 F 的临界值，对应的临界点显然异于 o 和 e.

2) 当 $c = F(o)$ 时，设 $F(o) = \inf\limits_{B_\rho} F$，其中 $B_\rho = \{x \in X \mid \|x\| < \rho\}$，由 c 的定义知：对 $\forall\, \varepsilon > 0$，存在 $h_0 \in \Gamma$，使得

$$\max_{t\in[0,1]} F(h_0(t)) \leqslant c + \varepsilon$$

根据连续函数介值定理，存在 $\bar{t} \in (0,1)$，使得 $0 \leqslant \|h_0(\bar{t})\| < \rho$. 令 $\bar{x} = h(\bar{t})$ 及 $U = \{x \in X \mid \|\bar{x}\|/2 < \|x\| < \rho\}$. 根据 $F(o) = \inf\limits_{B_\rho} F$，有

$$F|_{F_\varepsilon \cap U} \geqslant F(o) = c, F_\varepsilon = \{x \in X \mid F(x) < c + \varepsilon\}$$

运用定理 1 知，存在 $x_\varepsilon \in \overline{F}_\varepsilon \cap \overline{U}$，使得

$$\|F'(x_\varepsilon)\| \leqslant \sqrt{\varepsilon}$$

又 $c \leqslant F(x_\varepsilon) \leqslant c + \varepsilon$，由(PS)条件知，$(x_\varepsilon)$ 存在子列（记为本身），使得 $x_\varepsilon \to x_0$，则 $F'(x_0) = 0$，$x_0 \in \overline{U}$。这里 x_0 自然不同于 o 和 e. 证毕。

注 1　定理 3 最早出现于文献[3]。该文用另一种方法证明了如下定义的 b 是 F 的临界值：

$$b = \sup_{U \in O} \inf_{x \in \partial U} F(x)$$

其中　$O = \{U \subset X \mid U \text{ 是开集且 } o \in U, e \in \overline{U}\}$

定理 4　设 $F \in C^1(X, R)$ 满足(PS)条件且下方有界，则 F 是强制的，即 $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} F(x) = +\infty$.

证明　令 $C = \{d \in R \mid F^d \text{ 有界}\}$，其中 $F^d = \{x \in X \mid F(x) \leqslant d\}$，显然 $C \neq \Phi$（因 F 有下界）。设 $c_0 = \sup C$，下证 $c_0 = +\infty$，从而下是强制的。事实上，反设 $c_0 < +\infty$，则对 $\forall\ \varepsilon > 0$，集合 $\{x \in X \mid c_0 < F(x) < c_0 + \varepsilon\}$ 是无界的，从而存在 $\bar{x}_n \in X$，使得

$$c_0 < F(\bar{x}_n) < c_0 + 1/n, \|\bar{x}_n\| > n.$$

根据定理 1，取 $U = \{x \in X \mid \|x\| > n\} \cap \{F(x) > c_0\}$，则存在 $x_n \in \overline{F}_{1/n} \cap \overline{U}$，其中 $F_{1/n} = \{x \in X \mid F(x) < c_0 + 1/n\}$，使得 $\|F'(x_n)\| \leqslant 1/\sqrt{n}$. 注意到 $c_0 \leqslant F(x_n) \leqslant c_0 + 1/n$，$\|x_n\| > n$，这与 F 满足(PS)条件矛盾。证毕。

注 2　定理 4 最早由李树杰先生得到并用“梯度流”方法证明（见[4]）。最近文[5]用 Ekeland 变分原理给出了一个简单的证明，这里给出的证明比文[5]给出的更直接更简单些。实际上，基于定理 1，定理 4 是显然的。

参 考 文 献

1　Ekeland I. On the variational principle. J. Math. Anal. Appl. 1974, (47): 324～353

2　Ekeland I. Nonconvex minimization problems. Bulletin AMS. 1979, (1): 443～474

3　Rabinowitz P. H. Some aspects of critical point theory. Jan: MRC Tech. Rep # 2465, 1983

4　Li Shujie. Some aspects of critical Point theory, preprint. 1986

5　Costa D. G., Silva E A De B E. The Palais-Smale condition versus coercivity. Nonlinear Analysis TMA, 1991, 16(4): 371～381