

9 52-57

三维冲击 - 动力接触问题的有限元混合算法

A Mixed Finite Element Algorithm of Three-Dimensional Impact - Dynamic Contact Problems

欧垣安

Ou Hengan

(重庆大学机械工程一系, 重庆, 630044) (重庆大学机械传动实验室)

李润方

Li Runfang

0343-3

龚剑霞

Gong Jianxia

(重庆大学机械工程一系)

A 摘要 提出了一种三维冲击-动力接触问题的有限元混合算法,该算法用库仑摩擦定律表述动力接触面的边界条件;按修正的 Cholesky 分解算法建立接触面的有效柔度阵方程。在按 Newmark 算法作逐步积分计算中,每一时间步的迭代计算,仅需反复求解接触面的有效柔度阵方程。

关键词 冲击-动力接触问题;有限元法;动态响应

中国图书资料分类法分类号 O371.1; O343.3

算法

ABSTRACT A mixed finite element algorithm of three-dimensional impact-dynamic contact problems is developed. The Coulomb's law of friction is employed to describe the boundary conditions on dynamic contact surface, and a modified Cholesky elimination algorithm is used to establish the effective flexibility matrix equation of the dynamic contact surface. In the process of iterations by using Newmark direct numerical integration, the iterations of each time step are condensed only on the solutions of the effective flexibility equation on contact surface. The results show that the algorithm presented in this paper has a high efficiency and numerical accuracy, and it can be widely used in the numerical simulation of complex impact-dynamic contact engineering problems.

KEYWORDS impact-dynamic contact problems; finite element method; dynamic responses

0 引 言

在诸如航空、航天、核能、汽车、机械以及生物力学等许多领域中,多物体系统的动态特性和响应及动应力应变等,通常可采用数值计算方法对多物体系统的冲击-动力接触问题求解而获得,但由于多物体系统中动力接触面边界条件的非线性、接触压力分布及应力应变随

* 收文日期 1993-08-31
国家自然科学基金资助项目

时间历程变化,因此采用有限元等数值方法求解多物体系统的冲击-动力接触问题较求解多体系统静力接触问题更为复杂。目前对多物体系统的冲击-动力接触问题数值方法的研究及计算机仿真程序的研制已引起了广泛的关注。

J. O. Hallquist^[1]等采用隐式和显式的惩罚公式(Penalty Formulation)用有限元法对复杂结构的压力容器“O”形环及核能工厂输送管道的冲击-动力接触问题进行了三维大变形有限元数值分析计算;A. B. Chaudhary 和 K. J. Bathe^[2]采用拉格朗日乘子法(Lagrange Multiplier Technique)求解了静动力接触问题,并将此求解动力接触问题的程序模块装进 ADINA 结构分析程序;W-H Chen 和 J-T Yeh^[3]利用变换矩阵和静态凝聚技术(Transformation Matrix and Static Condensation Technique)推导了求解三维动力接触问题的有限元公式;S-C Wu 和 E. J. Hang^[4]采用子结构法对柔性机械系统的冲击-动力接触问题进行了分析计算;F. F. Mahmoud 和 N. J. Salamon^[5]等建立了一种求解三维动力接触问题的有限元算法,并对经典的冲击-动力接触问题^[6]作了计算分析。由于动力接触面边界条件的非线性,有限元数值方法的计算效率对冲击-动力接触问题的求解非常重要。因为在多物体系统中动力接触面边界区域相对很小,目前的冲击-动力接触问题有限元方法多将接触面迭代计算缩聚到接触区域上进行,以提高求解效率。文献[3]、[4]、[5]即是基于这一思想的不同算法,但对冲击-动力接触问题的数值分析方法和计算效率仍需作更深入的研究,以便于实际工程问题的求解。

本文在三维弹性接触问题改进有限元混合法的基础上^{[7][8]},提出了三维冲击-动力接触问题的有限元混合算法。该算法采用库仑摩擦定律表述动力接触面的切向力学条件,将动力接触面位移协调条件和力平衡条件用系数矩阵的形式表示,并建立冲击-动力接触问题接触面的有效柔度阵方程。在采用 Newmark 逐步积分法进行每一时间步的动力接触迭代计算中,仅需反复求解接触面的有效柔度阵方程,因此该算法有很高的计算效率。根据用本算法研制的计算程序,对两个算例进行的数值计算,验证了该方法的高计算效率和足够的数值精度。该程序能较好地用于多种情况下两物体复杂结构的冲击-动力接触问题有限元求解和计算机仿真。

1 动力接触面边界条件

用有限元法求解冲击-动力接触问题时,应准确地描述多物体系统动力接触面的边界条件,即在接触点对法向方向满足位移协调条件(位移非嵌入条件)和接触力平衡条件;在切向方向满足库仑摩擦定律和力平衡条件。由于多物体系统中动力接触面的几何形状非规整性。对如图 1 的两物体冲击-动力接触系统,建立了两个坐标系,即整体坐标系(O -XYZ)和动力接触面上的局部坐标系(o - ast),局部坐标系由 Ω_1 物体接触节点外法线方向(n)和与外法线方向垂直的表面主曲率的切线方向(t, s)组成。

由于在时间历程中,多物体系统中动力接触面的接触点对可能出现分开、粘着以及在切

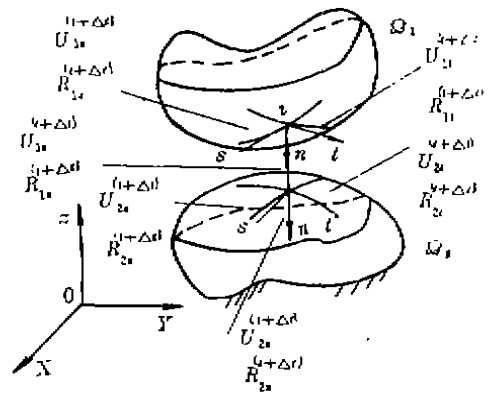


图 1 冲击-动力接触系统的整体和局部坐标系

图 1 冲击-动力接触系统的整体和局部坐标系

向上的相对滑动等不同情况,将这三种情况分别定义为分离状态、连续状态和滑动状态。三种接触状态下 $t + \Delta t$ 时刻的边界条件如表 1 所示。

表 1 动力接触面接触状态的边界条件

分 离 状 态	连 续 状 态	滑 动 状 态
$R_{1i}^{t+\Delta t} = R_{2i}^{t+\Delta t} = 0$	$R_{1i}^{t+\Delta t} = -R_{2i}^{t+\Delta t}$	$R_{1i}^{t+\Delta t} = -R_{2i}^{t+\Delta t}$
$R_{1i}^{t+\Delta t} = R_{2i}^{t+\Delta t} = 0$	$R_{1i}^{t+\Delta t} = -R_{2i}^{t+\Delta t}$	$R_{1i}^{t+\Delta t} = -R_{2i}^{t+\Delta t}$
$R_{1i}^{t+\Delta t} = R_{2i}^{t+\Delta t} = 0$	$R_{1i}^{t+\Delta t} = -R_{2i}^{t+\Delta t}$	$R_{1i}^{t+\Delta t} = -R_{2i}^{t+\Delta t}$
	$U_{2i}^{t+\Delta t} - U_{1i}^{t+\Delta t} + \delta_i^{t+\Delta t} = 0$	$U_{2i}^{t+\Delta t} - U_{1i}^{t+\Delta t} + \delta_i^{t+\Delta t} = 0$
	$U_{2i}^{t+\Delta t} - U_{1i}^{t+\Delta t} + \delta_i^{t+\Delta t} = 0$	$R_{1i}^{t+\Delta t} = \mu \cdot \sin \beta^{t+\Delta t} \cdot R_{1i}^{t+\Delta t} $
	$U_{2i}^{t+\Delta t} - U_{1i}^{t+\Delta t} + \delta_i^{t+\Delta t} = 0$	$R_{1i}^{t+\Delta t} = \mu \cdot \cos \beta^{t+\Delta t} \cdot R_{1i}^{t+\Delta t} $

其中: $R_{1i}^{t+\Delta t}, R_{2i}^{t+\Delta t}, R_{3i}^{t+\Delta t}$ ($i = 1, 2$)——分别为 D_1, D_2 物体动力接触面局部坐标方向 (n, t, s) 的接触力;

$U_{1i}^{t+\Delta t}, U_{2i}^{t+\Delta t}, U_{3i}^{t+\Delta t}$ ($i = 1, 2$)——分别为 D_1, D_2 物体动力接触面局部坐标方向 (n, t, s) 的位移;

$\delta_i^{t+\Delta t}, \delta_t^{t+\Delta t}, \delta_s^{t+\Delta t}$ ——分别为 D_1, D_2 物体动力接触面局部坐标方向 (n, t, s) 的相对间隙;

μ ——接触点对处于相对滑动时的摩擦系数;

$\beta^{t+\Delta t}$ ——接触点对相对滑动方向与局部坐标 s 方向的夹角,由 β 夹角值可确定每次迭代过程中接触点对的相对滑动方向。

采用有限元混合算法求解冲击-动力接触问题,接触点对间的接触状态是由迭代计算得到的,并且接触状态随时间历程而改变,每一时刻 $t + \Delta t$ 的迭代计算以动力接触面上所有接触点对两次迭代的状态一致为收敛准则。因此需要根据接触点对的位移和接触面力的关系,判定接触状态的变化,即如表 2 所示的接触面接触状态的判定条件。在 $t + \Delta t$ 时刻的迭代计算中,如接触状态改变,则要作下一次迭代计算;反之则迭代计算结束,有限元混合法进入下一个时间步的求解计算。

表 2 动力接触面接触状态的判定条件

	分 离 状 态	连 续 状 态	滑 动 状 态
分离状态	$U_{2i}^{t+\Delta t} - U_{1i}^{t+\Delta t} + \delta_i^{t+\Delta t} > 0$	$R_{1i}^{t+\Delta t} > 0$	$R_{1i}^{t+\Delta t} > 0$
连续状态	$U_{2i}^{t+\Delta t} - U_{1i}^{t+\Delta t} + \delta_i^{t+\Delta t} \leq 0$	$R_{1i}^{t+\Delta t} \leq 0$ $\sqrt{[R_{1i}^{t+\Delta t}]^2 + [R_{2i}^{t+\Delta t}]^2} \leq \mu \cdot R_{1i}^{t+\Delta t}$	$R_{1i}^{t+\Delta t} \leq 0$ $R_{1i}^{t+\Delta t} \cdot \delta_i^{t+\Delta t} \leq 0$ $R_{1i}^{t+\Delta t} \cdot \delta_s^{t+\Delta t} \leq 0$
滑动状态		$R_{1i}^{t+\Delta t} \leq 0$ $\sqrt{[R_{1i}^{t+\Delta t}]^2 + [R_{2i}^{t+\Delta t}]^2} > \mu \cdot R_{1i}^{t+\Delta t}$	$R_{1i}^{t+\Delta t} \leq 0$ $R_{1i}^{t+\Delta t} \cdot \delta_i^{t+\Delta t} > 0$ or $R_{1i}^{t+\Delta t} \cdot \delta_s^{t+\Delta t} > 0$

2 冲击 - 动力接触问题有限元混合算法

两物体的冲击 - 动力接触问题的动力方程有如下的矩阵形式：

$$M_i \ddot{U}_i^{t+\Delta t} + C_i \dot{U}_i^{t+\Delta t} + K_i U_i^{t+\Delta t} = P_i^{t+\Delta t} + R_i^{t+\Delta t}, \quad (i \in \Omega_1, \Omega_2) \quad (1)$$

式中： $M_i, C_i, K_i (i \in \Omega_1, \Omega_2)$ —— 分别为两物体的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵；

$P_i^{t+\Delta t}, R_i^{t+\Delta t} (i \in \Omega_1, \Omega_2)$ —— 分别为作用在两物体上的外载荷向量和接触力向量；

$\ddot{U}_i^{t+\Delta t}, \dot{U}_i^{t+\Delta t}, U_i^{t+\Delta t} (i \in \Omega_1, \Omega_2)$ —— 分别为两物体的加速度向量、速度向量和位移向量。

在时间历程的计算中，冲击 - 动力接触问题的有限元混合法采用了 Newmark- β 积分法，在 $t + \Delta t$ 时刻系统各物体的位移和速度向量为^[9]

$$U_i^{t+\Delta t} = U_i^{(0)} + \dot{U}_i^{(0)} \cdot \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{U}_i^{(0)} + \beta \ddot{U}_i^{t+\Delta t} \right] \Delta t^2 \quad (2)$$

$$\dot{U}_i^{t+\Delta t} = \dot{U}_i^{(0)} + [(1 - \gamma) \ddot{U}_i^{(0)} + \gamma \ddot{U}_i^{t+\Delta t}] \cdot \Delta t \quad (i \in \Omega_1, \Omega_2) \quad (3)$$

式中： $0 \leq 2\beta \leq 1$ $\gamma = 2\beta$

由式(1)、(2)、(3)，并按 Newmark- β 法的积分格式，可写出两物体冲击 - 动力接触问题在 $t + \Delta t$ 时刻的仅含有位移向量 $U_i^{t+\Delta t}$ 的矩阵方程：

$$\hat{K}_i \cdot U_i^{t+\Delta t} = \hat{P}_i^{t+\Delta t} + R_i^{t+\Delta t} \quad (i \in \Omega_1, \Omega_2) \quad (4)$$

式中： $\hat{K}_i (i \in \Omega_1, \Omega_2)$ —— 两物体 Newmark β 法的有效刚度矩阵；

$\hat{P}_i (i \in \Omega_1, \Omega_2)$ —— 两物体的有效外载荷向量。

对冲击 - 动力接触问题的动力接触面分为接触区和非接触区，并考虑位移非嵌入条件、力平衡条件和切向滑动库仑摩擦定律，把前述各种接触状态的关系式，用系数矩阵表示，则两物体冲击 - 动力接触问题 $t + \Delta t$ 时刻的矩阵方程为

$$\begin{bmatrix} \hat{K}_1 & 0 & D_1 \\ 0 & \hat{K}_2 & D_2 \\ C_1 & C_2 & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^{t+\Delta t} \\ U_2^{t+\Delta t} \\ R^{t+\Delta t} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{P}_1^{t+\Delta t} \\ \hat{P}_2^{t+\Delta t} \\ \delta^{t+\Delta t} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

式中： C_1, C_2 —— 分别为两物体接触面位移协调条件的系数矩阵；

D_1, D_2, D —— 分别为两物体接触力平衡条件和库仑摩擦条件的系数矩阵；

$\delta^{t+\Delta t}$ —— 接触点对的相对间隙向量。

矩阵方程(5)的未知向量为 Ω_1, Ω_2 物体的位移向量和 Ω_1 物体的接触力向量 $R^{t+\Delta t}$ 组成的混合向量，则在 $t + \Delta t$ 时间步的迭代计算中，需要对混合模式的矩阵方程(5)求解。为提高对时间步长的逐步积分计算及接触迭代计算的效率，采用修正的 Cholesky 分解算法。作分解消元运算时，同时求出各系数矩阵相应的变化，并对各子矩阵作必要运算，可得两物体冲击 - 动力接触问题在动力接触面上的有效柔度阵方程：

$$\hat{F} \cdot R^{t+\Delta t} = \delta^{t+\Delta t} - \delta_p^{t+\Delta t} \quad (6)$$

$$\hat{F} = D - C_1 \cdot D_1 - C_2 \cdot D_2 \quad (7)$$

$$\delta_p^{t+\Delta t} = C_1 \cdot \hat{P}_1^{t+\Delta t} + C_2 \cdot \hat{P}_2^{t+\Delta t} \quad (8)$$

式中: \hat{P} —— Ω_i 物体动力接触面上的有效柔度矩阵;

$\delta_p^{t+\Delta t}$ ——由外载荷在动力接触面上产生的相对位移向量;

\tilde{D}_1, \tilde{D}_2 ——经修正的 Cholesky 分解消元运算 D_1, D_2 系数矩阵相应的变化;

$\tilde{P}_1^{t+\Delta t}, \tilde{P}_2^{t+\Delta t}$ ——两物体接触面外载荷向量相应的变化。

因此在任一时间步的 Newmark 法积分运算中,迭代计算被凝缩到两物体动力接触面上进行,大大降低了迭代计算中的重复运算,在接触迭代计算前,需假设接触面的状态,经数次迭代计算,则能求出动力接触面力向量 $R^{t+\Delta t}$,代入方程(4)即可计算出该时间步的位移、速度和加速度,在 Newmark- β 法逐步积分中,选取足够小的时间步长 Δt ,则能保证足够的计算精度。

3 数值分析

3.1 算例 1

算例 1 为图 2 的两个三维长杆的冲击-动力接触问题的数值分析,如图示一端固定的长杆受到另一根尺寸相同长杆以初速度 $\dot{U}_0 = -1 \text{ cm/s}$ 运动的冲击作用,两个三维长杆的几何尺寸如图所示,两杆的弹性模量为 $E = 2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$,密度 $\rho = 7.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$,泊松比 $\nu = 0.3$ 。

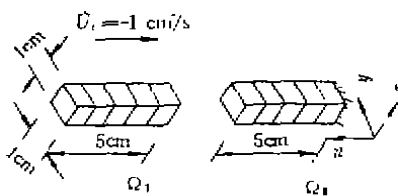


图 2 算例 1 计算模型

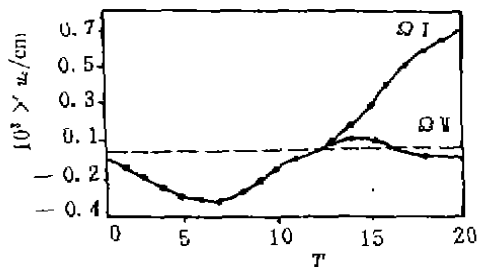


图 4 接触面位移(u_c)随时间变化曲线

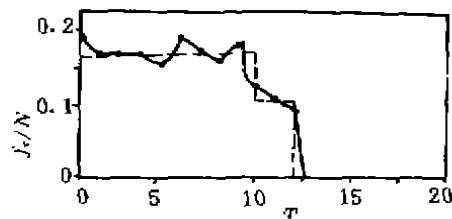


图 3 动力接触面节点接触力(f_c)

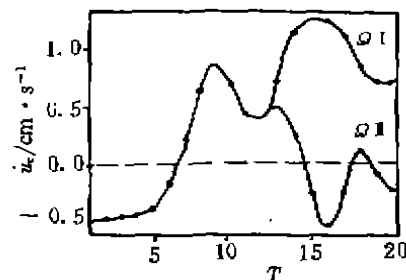


图 5 接触面速度(\dot{u}_c)随时间变化曲线

经冲击-动力接触问题有限元混合法的数值分析,在冲击的时间历程中,时间步长取 $\Delta t = 10^{-4} \text{ s}$,动力接触面上节点的接触力(f_c)在各时间步(T)的变化曲线如图 3 所示,两物体动力接触面上节点的位移(u_c)和速度(\dot{u}_c)随时间的变化规律分别如图 4、图 5 所示。计算结果与典型冲击-动力接触问题的数值分析的计算规律一致。

3.2 算例 2

算例 2 为六面体与半弹性平面在突加载荷作用下的动力接触问题的数值分析,计算模

型如图6所示,共有三维八节点等参单元120个、节点247个、动力接触面上接触点对25对。计算模型中两物体的材料特性与算例1相同,Newmark逐步积分的时间步长取 $\Delta t = 10^{-4}$ s。

图7为动力接触面中心接触点对随时间历程的接触力(f_c)变化曲线,反映了 Ω_1 物体在 $q(t) = 10^4 \text{ N/m}^2$ 恒均布突加载荷作用下,动力接触面上接触力的瞬态响应。图8为动力接触面中心接触点对速度随时间历程的变化曲线。由计算结果可知,在突加载荷作用下的动力接触问题,其接触力、应力应变均随时间而变化,这与在相同载荷作用的静力接触问题的解有相当大的差别,因而对许多工程领域的冲击-动力接触问题进行准确的数值分析,具有重要的理论意义和实际价值。

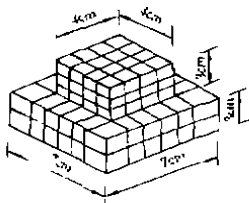
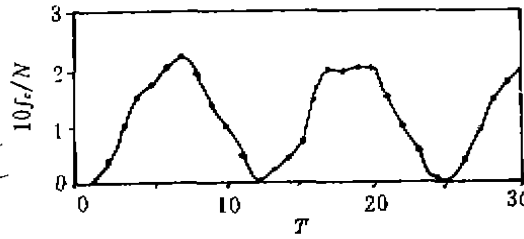
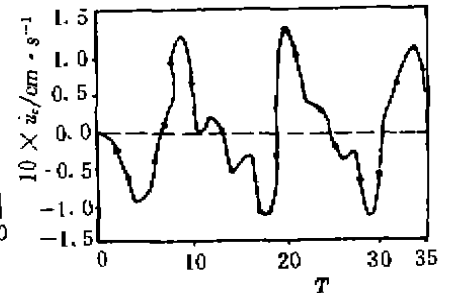


图6 算例2计算模型

图7 接触中心节点接触力(f_c)图8 接触面中心节点速度(u_c)曲线

4 结 论

本文提出了一种三维冲击-动力接触问题动力响应数值分析的有限元混合算法,该算法具有很高的计算效率和足够的数值精度,研制的计算程序可以作为诸如机械传动多物体复杂系统的冲击-动力接触问题作深入数值分析的标准基础。

参 考 文 献

- 1 Hallquist J O, Goudreau G L, Benson D J. Sliding Interface with Contact-Impact In Large-Scale Lagrangian Computations, *Comp. Meth. in Applied Mech. & Eng.*, 1985, 51: 107~137
- 2 Chaudhary A B, Bathe K J. A Solution Method for Static and Dynamic Analysis of Three-Dimensional Contact Problems with Friction, *Comp. & Struc.* 1986, 24(6): 855~873
- 3 Chen W-H, Yeh J-T. Three-Dimensional Finite Element Analysis of Static and Dynamic Contact Problems with Friction, *Comp. & Struc.*, 1990, 35(5): 541~552
- 4 Wu S-C, Hang E J. A Substructure Technique for Dynamics of Flexible Mechanical with Contact-Impact, *Trans. of the ASME*, 1990, 112(9)
- 5 Mahmoud F F, Hassan M M, Salamon N J. Dynamic Contact of Deformable Bodies, *Comp. & Struc.*, 1990, 36(1)
- 6 Hughes T J, Taylor R L, Sackman J L et al. A Finite Element Method for a Class Contact Impact Problems, *Comp. Meth. Applied Meth. & Eng.*, 1976, 8: 249~276
- 7 欧恒安, 龚剑霞. 三维弹性接触问题有限元改进混合法及数值计算, *重庆大学学报*, 1988, 11(8): 52~58
- 8 Ou Hengan, Li Runfang, Gong Jianxia. An Improved Mixed Approach of Finite Element Method for Three-Dimensional Elastic Contact Problems with Friction, *Proceedings of 22nd Midwestern Mechanics Conference*, Rolla, MO, U. S. A., Oct. 1991
- 9 Bathe K J, Wilson E J. *Numerical Methods In Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, Inc., 1976