1994年3月　　重庆大学学报　　Vol.17,№.2
第17卷第2期　　JOURNAL OF CHONGQING UNIVERSITY　　Mar. 1994

·研究简报·　　22 , 26 - 130

对边界元法的改进（Ⅱ）*

Improvements on the Boundary Element Method（Ⅱ）

谭邦定　　杨守义
Tan Bangdin　　Yang Shouyi
（重庆大学电气工程系，重庆，630044）

TM151.1

摘　要　就传统边界元法在计算靠近边界的内点位（或场分量）值方面所存在的问题，提出了一种改进方法，即边界单元外移法，它将距所求内点最近的边界单元外移一适当距离，以减小基本解奇异性对求解稳定性和精度的不良影响。推导了外移单元上等效源密度的计算公式，给出了一个算例。

关键词　内点；外移单元；劳平边界条件　　边界元法，电磁场
中国图书资料分类法分类号　TM151.1；TM153.1

ABSTRACT　The tranditional boundary element method has some drawbacks when used to compute the potentials or the components of the vector field of the internal points near the boundary. The paper presents an improved method——the boundary element outward-moving method, which moves the closest boundary element to the internal point outward to a suitable distance, in order to reduce the ill influences on the numerical stability and accuracy caused by the singularity of the fundamental solution. And the formula of the equivalent source density on the outward-moving boundary element is deduced with an example.

KEYWORDS　internal pont; outward movement boundary element; robin boundary condition

0　引　　言

用边界元法求解边值问题，要涉及到边界未知量（位或其法向导数）和场域内任一点待求量（位值或场强值）的计算这两个方面，并且后者是在前者的基础上进行的。关于如何有效地克服传统边界元法在求解边界未知量方面所存在的奇异积分和角点问题，作者已在文献[4]中作过讨论。本文考虑解决的是传统边界元法在求取过分靠近边界的内点待求量时所存在的另一个问题。

* 收文日期　1992-04-24

1　边界积分方程

具体考虑二维平行平面场的拉普拉斯方程边值问题：

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0 && \in \Omega \\ u &= u_s && \in \Gamma_1 \\ q = \frac{\partial u}{\partial n} &= q_s && \in \Gamma_2 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

（Ω 为求解区，其边界 $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$）

与之相应的边界积分方程为[1]

$$c(\vec{r})u(\vec{r}) = \oint_\Gamma \left[F(\vec{r},\vec{r}')\frac{\partial u(\vec{r}')}{\partial n} - u(\vec{r}')\frac{\partial F(\vec{r},\vec{r}')}{\partial n} \right] \mathrm{d}\Gamma \tag{2}$$

式中，$c(\vec{r})$ 是一个与场点位置有关的常数，对于内点 $c(\vec{r}) = 1$；$F(\vec{r},\vec{r}')$ 为拉普拉斯方程的基本解，它应为[2]

$$F(\vec{r},\vec{r}') = -\frac{1}{2\pi}\ln|\vec{r} - \vec{r}'| \tag{3}$$

若 Ω 是在 xoy 平面上，则域内任一点的场分量表示为

$$\left.\begin{aligned} q_x = \frac{\partial u}{\partial x} &= \oint_\Gamma \left[q\frac{\partial F}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial n}\right) \right] \mathrm{d}\Gamma \\ q_y = \frac{\partial u}{\partial y} &= \oint_\Gamma \left[q\frac{\partial F}{\partial y} - u\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial n}\right) \right] \mathrm{d}\Gamma \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

在算得边界未知量之后，利用式(2)、(4)可分别求任一内点的位值和两场分量值。若待求内点离边界很近，在靠近该内点的一小段边界上 $|\vec{r} - \vec{r}'|$ 都很小，使得基本解 $F(\vec{r},\vec{r}')$ 以及 $\frac{\partial F}{\partial n}$、$\frac{\partial F}{\partial x}$、$\frac{\partial F}{\partial y}$、$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)$、$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)$ 的奇异性显得十分突出，内点离边界越近，奇异性就越为严重，对求解产生的不良影响也越大。因此，处于帖近边界的一内域窄带（二维情况）之中的所有内点，其待求量的计算要出现误差既大且很不稳定的弊端，这就是传统边界元法存在的另一个问题。

间接边界元法提出过避免上述问题的思想，即在实际边界之外附设另一边界，以便使所有内点距附设边界都有相当距离[3]. 但附设边界要比实际边界大，离散的单元也多，计算附设边界上等效源密度的工作量也就相应增多。而本文所提出的边界单元外移法，仅将距待求内点最近、奇异性尤为突出的一个边界单元向外平移一段距离而已。

2　外移单元上的等效源密度

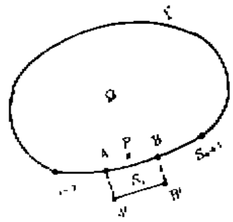

图 1　边界单元的外移

假定场域的边界被离散为 N 个单元，在求得边界未知量之后拟进一步计算靠近单元 Se（其两端点为 A、B）的内点 P 的位值 $u(P)$. 将单元 Se 沿其外法向平移一段距离 d，便得到一个两端点为 A'、B' 的所谓外移单元，如图 1 所示。于是，外移单元 $A'B'$ 和其余的原边界单元 S_1、S_2、…、S_{e-1}、S_{e+1}、…、S_N 以及图示两线段 AA'、$B'B$ 一起，将围成

一个新的区域，用 Ω_1 表示。设 Ω_1 内另有一个位函数 φ，如果我们能设法使其在原考虑区域 Ω 内与 u 处处相等，则原问题(在 Ω 内求 $u(P)$)就可以转化成 Ω_1 内离新边界较远的 P 点的另一位值 $\varphi(P)$ 予以求解。

为确保在 Ω 内 φ 与 u 处处相等，必须对 φ 的控制方程和边界条件作如下要求：(1) 在 Ω_1 内，φ 亦应满足拉普拉斯方程；(2) 在 Ω_1 和 Ω 的公共边界(原边界 Γ 除去 Se 后留下的部分边界，用 $\Gamma' = \Gamma'_1 + \Gamma'_2$ 表示)上，φ 的边界条件与 u 的原给定边界条件相同；(3) 在 Ω_1 的另外三段边界(AA'、$A'B$、$B'B$)上，将 φ 及其法向导数作统一考虑的 Robin 边界条件(可视其为某种等效源密度)是待求的，它与 Γ' 的已知边界条件一起应使 Se 上的 φ 与原先给定或已算得的 u 处处相等。为简化 AA'、$A'B'$、$B'B$ 上等效源密度的计算，可将 AA'、$B'B$ 上的Robin边界条件取为零。于是，φ 的定解问题表示为：

$$\left.\begin{array}{ll}
\nabla^2\varphi = 0 & \in \Omega_1 \\
\varphi = u_s & \in \Gamma'_1 \\
\dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = \dfrac{\partial u}{\partial n} = q_s & \in \Gamma'_2 \\
F\dfrac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\dfrac{\partial F}{\partial n} = 0 & \in AA', B'B \\
F\dfrac{\partial F}{\partial n} - \varphi\dfrac{\partial F}{\partial n} = \sigma & \in A'B'
\end{array}\right\} \tag{5}$$

式中，σ 为待定的等效源密度。

根据式(2)，将上述定解问题的边界积分方程写成

$$c(\vec{r})\varphi(\vec{r}) = \int_{\Gamma'}\left(F\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial F}{\partial n}\right)\mathrm{d}\Gamma + \int_{A'B'}\sigma\mathrm{d}\Gamma \tag{6}$$

由 φ 与 u 在 Ω 内处处相等的条件得知，在 Γ' 上有 $\varphi = u$ 和 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = \dfrac{\partial u}{\partial n}$，故 Ω_1 内任一点的位值应为

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{\Gamma'}\left(F\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial F}{\partial n}\right)\mathrm{d}\Gamma + \int_{A'B'}\sigma\mathrm{d}\Gamma \tag{7}$$

简记式(7)右边的第一项积分为 $\varphi_0(\vec{r})$，即

$$\varphi_0(\vec{r}) = \int_{\Gamma'}\left(F\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial F}{\partial n}\right)\mathrm{d}\Gamma \tag{8}$$

则有

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi_0(\vec{r}) + \int_{A'B'}\sigma\mathrm{d}\Gamma \tag{9}$$

在单元 Se 上的 u、φ、φ_0，分别用 $u^{(Se)}$、$\varphi^{(Se)}$ 和 $\varphi_0^{(Se)}$ 表示，并且 $\varphi^{(Se)}$ 等于已知的 $u^{(Se)}$。将式(9)用于 Se 上的任一点，可得

$$u^{(Se)} = \varphi_0^{(Se)} + \int_{A'B'}\sigma\mathrm{d}\Gamma \tag{10}$$

外移单元 $A'B'$ 上的等效源密度 σ，就是此积分方程的解。

3 边界单元外移法

以上表明，为解决传统边界元法在计算靠近边界的内点位值(或场强值)方面的缺陷问

题而提出的边界单元外移法，其实质是通过距待求内点最近的边界单元的向外平移，以减小基本解奇异性对求解的不良影响，其计算步骤则是在求得边界未知量之后，用式(10)求外移单元上的等效源密度 σ，而后按式(9)求内点 P 的位值 $\varphi(P)$（即 $u(P)$）. 但就方法本身而言，其核心问题则是寻求外移单元上的等效源密度。

由式(10)求外移单元上的 σ 一般得用数值方法。因为 $A'B'$ 是由 Se 向外平移而得到的，可仍视其为一个单元，并且使 σ 的插值阶数与原先在 Se 上求 u 或 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 时采用的插值阶数相同，即 $A'B'$ 上的节点数等于 Se 上的节点数。设 $A'B'$ 上有 Ne 个节点（采用 Ne-1 阶插值），则 σ 可表示为：

$$\sigma = \boldsymbol{\Phi}(\xi)\boldsymbol{\sigma} \tag{11}$$

式中，用局部坐标 ξ 表示的形状函数向量 $\boldsymbol{\Phi}(\xi)$ 和节点处 σ 的列向量 $\boldsymbol{\sigma}$ 分别为

$$\boldsymbol{\Phi}(\xi) = \{\varphi_1(\xi)\ \varphi_2(\xi)\ \cdots\ \varphi_{Ne}(\xi)\} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_1\ \sigma_1\ \cdots\ \sigma_{Ne}\}^{T} \tag{13}$$

将式(11)代入式(10)，然后用之于单元 Se 的第 K 个节点上，得

$$u_K^{(Se)} = \varphi_{OK}^{(Se)} + \int_{A'B'} \boldsymbol{\Phi}(\xi)\boldsymbol{\sigma} d\Gamma$$

或

$$\left[\int_{A'B'} \boldsymbol{\Phi}(\xi) d\Gamma\right]\boldsymbol{\sigma} = u_K^{(Se)} - \varphi_{OK}^{(Se)} \tag{14}$$

分别取 $K = 1,2,\cdots,Ne$，便得所需的 Ne 阶代数方程组。由此解得 σ_1、σ_2、$\cdots$、σ_{Ne} 之后，根据式(11)便获得 $A'B'$ 上的 σ 分布。

4 算　例

对于图 2 所示的二维平行平面场的拉普拉斯边值问题，需要计算靠近边界的 4 个内点 a、b、c、d 的位值。该问题有解析解：

$$u = \frac{1}{2}xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}x$$

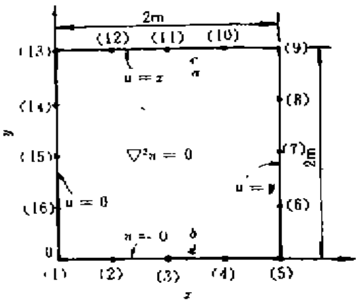

图 2　算例用图

将边界离散为等长的 16 个线性单元，节点编号见图 2. 边界节点未知量用改进边界元法计算[4]，其结果如表 1 所示. 在表中，角点处的两个位的法向导数值沿边界的逆时针方向依次用 q^-、q^+ 表示，而其它节点的一个计算值列在 q^- 一栏。

计算 a、b、c、d 四个内点的位值，采用了本文的边界单元外移法和传统边界元法，以便进行误差比较。靠近 a、c 点的单元和靠近 b、d 点的单元分次外移的距离均为 0.5 m. 用两种方法算得的内点位值及相对误差，如表 2 所示。

从表 2 可以看出，对于靠近边界的内点 a、b、c、d，用边界单元外移法算得的位值是相当精确的，并且离边界越近的 $c(d)$ 点较之离边界稍远的 $a(b)$ 点来说，计算精度的提高更为明显。

表 1 用改进边界元法算得的边界节点 q 值

节点号	坐标 x	标 y	计算值 q^-	q^+
1	0.0	0.0	0.000177	−0.000293
2	0.5	0.0	−0.249725	
3	1.0	0.0	−0.500416	
4	1.5	0.0	−0.749477	
5	2.0	0.0	−1.000790	0.000434
6	2.0	0.5	0.249876	
7	2.0	1.0	0.500029	
8	2.0	1.5	0.750020	
9	2.0	2.0	0.999914	1.000091
10	1.5	2.0	0.749963	
11	1.0	2.0	0.500021	
12	0.5	2.0	0.249994	
13	0.0	2.0	−0.000022	−0.999926
14	0.0	1.5	−0.750059	
15	0.0	1.0	−0.499930	
16	0.0	0.5	−0.250088	

表 2 用两种方法算得的内点位值和相对误差

内点	坐标 x	标 y	理论值 u_0	本文方法 u	$e(\%)$	传统方法 u_e	$e_e(\%)$
a	1.25	1.9	1.18750	1.173201	1.2041	1.151180	3.0585
b	1.25	0.1	0.06250	0.062038	0.7392	0.061749	1.2016
c	1.25	1.99	1.24375	1.253762	−0.8050	0.721060	42.0253
d	1.25	0.01	0.00625	0.006375	−2.0000	0.013645	−118.32

5 结　　论

1) 边界单元外移法是求解靠近边界的内点位值(或场强值)的一种简单而有效的方法，它可以在计算量增加不多(为求外移单元上的等效源密度)的情况下换得计算精度的大幅度提高。

2) 单元的外移距离显然不应取得过小，但也没有必要取得很大。算例仅取外移距离等于外移单元的长度，表明已能较好地满足精度要求。

参 考 文 献

1 Brebbia C A, et al. Boundary Element Techniques-Theory and Application in Engineering. London: Springer-Verlay, 1984

2 梁昆淼编. 数学物理方法. 北京：人民教育出版社，1978

3 Brebbia C A, Walker S. Boundary Element Techniques in Engineering. London, Boston: Newnes-Butterworths, 1980

4 杨守义，谭邦定. 对边界元法的改进(Ⅰ). 重庆大学学报，1993，16(6)：38～45