(5) 25-31

用外微分式统一表示电磁量的交界面条件*

The Unified Representation of Interface Conditions of Electromagnetic Quantities Using Exterior Differential Forms

云正清　　谭邦定
Yun Zhengqing　　Tan Bangding
(重庆大学电气工程系，重庆，630044)

TM153

A **摘　要**　导出了 p 次外微分式在 p 维子流形两侧的连续性条件，将它用于 Minkowski 四维空-时流形，得到了电磁场中诸电磁量应满足的交界面条件。

关键词　电磁学 / 外微分式；交界面条件　　电磁量
中国图书资料分类法分类号　TM153.4；O186.1

ABSTRACT　A continuity condition of p-forms across a p-dimensional submanifold is derived. The various interface conditions of electromagnetic quantities are obtained through the application of the continuity condition to Minkowski manifold of space-time.

KEYWORDS　electromagnetics / exterior differential form; interface condition

0　引　　言

电磁量的交界面条件有三类，即

(1) 电磁量在交界面上连续，如电位 φ；

(2) 电磁量在交界面的切向分量连续，如电场强度 E；

(3) 电磁量在交界面的法向分量连续，如磁感应强度 B.

电磁量的这些连续性条件蕴含着深刻的几何意义，反映出电磁量内在的物理本质[1].

事实上，条件(1)是电磁量在交界面各点上连续的推论；(2)是电磁量在交界面上线积分连续的推论；条件(3)则是电磁量在交面上面积分连续的推论[2].

电磁量的几何特性可以用外微分式充分描述。笔者运用微分几何中微分流形、外微分式等概念和结论，研究满足一定条件的外微分式在子流形两侧的连续性条件，得到了一般性的结果。将该结果用于四维 Minkowsik 空-时流形，就得到电磁量在交界面两侧的各种连续性条件。

1　微分几何中的一些概念和结论[3]

* 收文日期　1992-07-07

1.1 流形、外微分式

流形是 Euclid 空间概念的推广。直观地说，n 维流形 M 局部地（但整 体不一定）是 n 维 Euclid 空间 R^n. 换言之，对流形 M 中每一点的一个邻域 $U\subset M$，均可在其中引入局部坐标系 (U,u^i)，这里，$u^i(i=1,\cdots,n)$ 为第 i 个坐标基。但整体坐标系不一定存在。因此，当不涉及流形的整体性质时，可以把流形看作 n 维 Euclid 空间。

流形 M 上可以引进微分的概念，使 M 成为微分流形，即在局部坐标系 (U,u^i) 中可以作微分运算。

给定 M 的一个局部坐标系 (U,u^i)，其中的 p 次外微分式 ω^p 定义为 $(1\leqslant p\leqslant n)$：

$$\omega^p=\sum_{[i_1\cdots i_p]}\omega_{i_1\cdots i_p}du^{i_1}\wedge\cdots\wedge du^{i_p} \tag{1}$$

式中，$\omega_{i_1\cdots i_p}$ 是 $u^i(i=1,\cdots,n)$ 的实函数，叫做 ω^p 的系数；"$\wedge$"表示外积，它与向量的叉乘积有相似的性质，即

$$du^i\wedge du^j=\begin{cases}0 & i=j\\ -du^j\wedge du^i & i\neq j\end{cases}$$

$[i_1\cdots i_p]$ 是从 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中取 p 个不同元素的组合。因此，ω^p 共有 $\binom{n}{p}=n!/p!(n-p)!$ 项。规定

$$\omega^0=\omega_0$$

即 0 次外微分式就是实函数。

ω^p 亦叫 p 次微分形式，简称 p- 形式。

如果 ω^p 只有一个系数不为零，ω^p 叫做单项式。

1.2 外微分算子与 Poincare 引理

对外微分式 ω^p，可以定义线性算子 d：

$$d:\quad \omega^p\rightarrow\omega^{p+1}$$

d 叫作外微分算子。具体地，对式(1)，d 定义为

$$d\omega^p=\sum_{[i_1\cdots i_p]}(d\omega_{i_1\cdots i_p})\wedge du^{i_1}\wedge\cdots\wedge du^{i_p} \tag{3}$$

式中，$d\omega_{i_1\cdots i_p}$ 为通常的微分运算，即

$$d\omega_{i_1\cdots i_p}=\left(\frac{\partial}{\partial x^1}dx^1+\frac{\partial}{\partial x^2}dx^2+\cdots+\frac{\partial}{\partial x^n}dx^n\right)\omega_{i_1\cdots i_p}$$

可以证明，对任意 p- 形式 ω^p，有

$$d(d\omega^p)\equiv 0 \tag{4}$$

此即 Poincare 引理。

1.3 定向流形、带边区域与 Stokes 公式

在 Enclid 空间中，有线积分、面积分等概念，且积分区域是有方向的。这些概念可以推广到 n 维流形 M 中。

如果 M 上存在一个连续的处处不为零的 n 次外微分式，M 叫做可定向的，并用 $du^1\wedge\cdots$

$\wedge\, du^n$ 表示其定向。事实上，$du^1 \wedge \cdots \wedge du^n$ 蕴含了 du^1、du^2、…，du^n 之间的一种顺序，它可以表示流形的定向。由外积的反交换性可知，对连通的可定向流形，恰有两个不同的定向（叫做流形的两侧）。本文中的流形均是可定向的。

流形中的带边区域 $V \subset M$ 是 M 的子集，亦叫子流形，子流形中的点分为内点和边界点两类。边界点的集合叫做 V 的边界，记作 ∂V. 如果 V 是 $p+1$ 维的，则 ∂V 是 M 的 p 维子流形，这里 $p < n$.

对 M 中的 p 次外微分式 ω^p，有 Stokes 公式

$$\int_{\partial V} \omega^p = \int_V d\omega^p \tag{5}$$

式中，$V \subset M$ 为 $p+1$ 维子流形。∂V 的定向由 V 的定向诱导，即如果 V 的定向表为 $du^1 \wedge \cdots \wedge du^p \wedge du^{p+1}$，则 ∂V 的定向表为 $(-1)^{p+1} \cdot du^1 \wedge \cdots \wedge du^p$.

设 V 是 $p+1$ 维的，取 $q' \in \partial V$ 的局部坐标系为 (U, u^i)，$i = 1,2,\cdots,n$. 显然，可以选择 u^i，使

$$u^i(q') = 0, i = 1,2,\cdots,p$$

即 q' 为坐标原点；并且，对 $q \in U \cap \partial V$，可使

$$u^k(q) = 0, k = p+1, p+2, \cdots, n \tag{6}$$

如图 1 所示。式(6) 是 ∂V 在局部坐标系下的方程。

V 中的 $2(p+1)$ 个两两平行的 p 维子流形构成 $p+1$ 维超柱体 $V_R \subset V$. 在 V_R 的诱导定向下，相互平行的两个超曲面（即 p 维子流形）的正方向恰相反。

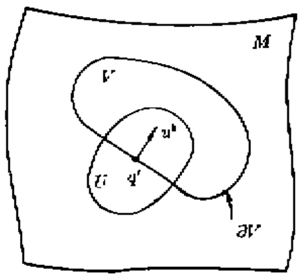

图 1　局部坐标的选择

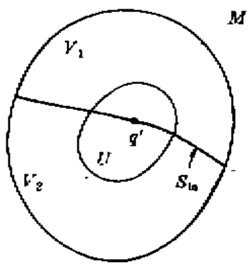

图 2　交界面示意

2　外微分式在子流形两侧的连续性条件

考虑 M 中的 $p+1(p<n)$ 维带边区域 V，它由 V_1 和 V_2 组成，即 $V = V_1 \cup V_2$，$V_1 \cap V_2 = S_{in}$，这里，S_{in} 为 p 维子流形，称为 V_1 与 V_2 的交界面。如图 2 所示。

取 $q' = S_{in}$，其坐标域为 (U, u^i)，则 S_{in} 的局部坐标方程由式(6) 表示。

设 V 中给定 p- 形式 ω^p 和 $(p+1)$- 形式 α^{p+1}，其系数均为有界，且对 V 中的任意 $p+1$ 维子流形 V_3，满足：

$$\int_{\partial V_3} \omega^p = \int_{V_3} \alpha^{p+1} \tag{7}$$

现在推导满足式(7)的 p- 形式在 p 维子流形 S_{in} 两侧的连续性条件。令

$$u^{p+1} = \pm a \tag{8}$$

$$u^j = \pm b,\ j = 1,2,\cdots,p \tag{9}$$

式中，a,b 为常数。式(8),(9) 给出 $2(p+1)$ 个两两平行的超曲面(p 维子流形)，它们围成一个 $p+1$ 维超柱体 V_R。将 V_R 的边界分成三部分：

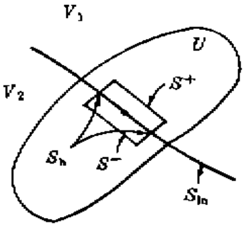

图 3 超柱体及其侧面

$$\partial V_R = S^+ \cup S^- \cup S_h$$

其中，S^+,S^- 由 $u^{p+1} = +a$,$u^{p+1} = -a$,确定(即 V_R 的“端面”)；S_h 由 $u^j = +b$,$u^j = -b$ 确定(V_R 的“侧面”)。如图 3 所示。在 V_2 诱导定向下，S^+、S^- 的方向相反。

令 $V_S = V_R$,代入式(7),得

$$\int_{S^+\cup S^-\cup S_h} \omega_s^p = \int_{V_R} \alpha^{p+1} \tag{10}$$

依式(6)、(8),对 S^+ 和 S^- 有

$$u^{p+1} = \pm a, u^l = 0, l = p+2,\cdots,n$$

所以

$$du^k = 0, k = p+1, p+2,\cdots,n$$

代入式(1),得

$$\omega^p(S^\pm) = \omega_{1\cdots p}(S^\pm) du^1 \wedge \cdots \wedge du^p \tag{11}$$

即在 $S^\pm$ 上，ω^p 为单项式。将式(11) 代入式(10),得

$$\int_{S^+} \omega^+_{1\cdots p} du^1 \wedge \cdots \wedge du^p + \int_{S^-} \omega^-_{1\cdots p} du^1 \wedge \cdots \wedge du^p + \int_{S^h} \omega^p = \int_{V_R} \alpha^{p+1} \tag{12}$$

式中，$\omega^\pm_{1\cdots p} = \omega_{1\cdots p}(S^\pm)$。

当 $|a| \to 0$ 时，$S_h \to 0$,$V_R \to 0$. 由于 ω^p 和 α^{p+1} 均为有界，从而

$$\int_{S_h} \omega^p \to 0, \quad \int_{V_R} \alpha^{p+1} \to 0$$

代入式(12),得

$$\int_{S^+} \omega^+_{1\cdots p} du^1 \wedge \cdots \wedge du^p + \int_{S^-} \omega^-_{1\cdots p} du^1 \wedge \cdots \wedge du^p = 0 \tag{13}$$

同时，由于 $|a| \to 0$,有

$$S^+ = -S^- = S_{in} \cap V_R$$

式(13) 成为

$$\int_{S_{in}\cap V_R} (\omega^+_{1\cdots p} du^1 \wedge \cdots \wedge du^p - \omega^-_{1\cdots p} du^1 \wedge \cdots \wedge du^p) = 0 \tag{14}$$

由于 V_R 可以任选，$S_{in} \cap V_R$ 形状是任意的，从而由式(14) 可以推出

$$\omega^{+}_{1\cdots p}\mathrm{d}u^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^p = \omega^{-}_{1\cdots p}\mathrm{d}u^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^p \tag{15}$$

或者用系数表示

$$\omega^{+}_{1\cdots p} = \omega^{-}_{1\cdots p} \tag{16}$$

式(15)，(16) 即为 ω^p 在式(7) 的条件下在 S_{in} 两侧的连续性条件。

需要指出的是，由式(16) 便于导出电磁场量的交界面条件。

更一般地，$S_{\mathrm{i}} \cap U$ 的局部坐标方程可以写为

$$u^{i_k} = 0,\quad k = p+1, p+2, \cdots, n$$

这里，$\{i_{p+1}, i_{p+2}, \cdots, i_n\}$ 是 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 中任意一组 $(n-p)$ 个不同的元素。这样，ω^p 在 S^+、S^- 上的单项式为

$$\omega^p(S^{\pm}) = \omega_{i_1\cdots i_p}(S^{\pm})\mathrm{d}u^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^{i_p}$$

式(15)、(16) 成为

$$\omega^{+}_{i_1\cdots i_p}\mathrm{d}u^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^{i_p} = \omega^{-}_{i_1\cdots i_p}\mathrm{d}u^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^{i_p}$$

$$\omega^{+}_{i_1\cdots i_p} = \omega^{-}_{i_1\cdots i_p}$$

3　电磁量的交界面条件

3.1　电磁量的外微分式

先引入一些电磁量的外微分式，如表 1 所示。

表 1　用外微分式表示的电磁量

		标量、向量表示	三维空间微分形式表示
	E	(E_1, E_2, E_3)	$E_1\mathrm{d}x^1 + E_2\mathrm{d}x^2 + E_3\mathrm{d}x^3$
电	B	(B_1, B_2, B_3)	$B_1\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + B_2\mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^1 + B_3\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2$
	H	(H_1, H_2, H_3)	$H_1\mathrm{d}x^1 + H_2\mathrm{d}x^2 + H_3\mathrm{d}x^3$
	D	(D_1, D_2, D_3)	$D_1\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + D_2\mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^1 + D_3\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2$
磁	J	(J_1, J_2, J_3)	$J_1\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + J_2\mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^1 + J_3\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2$
	ρ	ρ	$\rho\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3$
	φ	φ	φ
量	A	(A_1, A_2, A_3)	$A_1\mathrm{d}x^1 + A_2\mathrm{d}x^2 + A_3\mathrm{d}x^3$

再考虑四维Minkowski时空流形 M^4 中的情形，在三维空间的基础上加入时间维 $\mathrm{d}t$，并令

$$\mathrm{d}x^0 = c\mathrm{d}t$$

其中 c 为光速，这样四个坐标基为

$$x^0,\quad x^1,\quad x^2,\quad x^3$$

它具有 Lorentz 度量，即

$$(\mathrm{d}l)^2 = -(\mathrm{d}x^0)^2 + (\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + (\mathrm{d}x^3)^2$$

其中 $\mathrm{d}l$ 为四维时空中的长度元。

参照表 1，引入场 2- 形式

$$F = -\mathrm{d}x^0 \wedge \frac{E}{c} + B \tag{17}$$

和源 2- 形式

$$G = \mathrm{d}x^0 \wedge \frac{H}{c} + D \tag{18}$$

以及电流密度 3- 形式

$$\Gamma = -\mathrm{d}x^0 \wedge \frac{J}{c} + \rho \tag{19}$$

和电磁位 1- 形式

$$\Omega = -\frac{\varphi}{c}\mathrm{d}x^0 \wedge + A \tag{20}$$

则通过外微分运算可以得到电磁场的基本方程为

$$\mathrm{d}G = \Gamma \tag{21}$$

$$\mathrm{d}\Omega = F \tag{22}$$

依 Poincare 引理式(4),由式(21),(22) 得

$$\mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{23}$$

$$\mathrm{d}F = 0 \tag{24}$$

式(21) ~ (24) 包含了 Maxwell 方程组、电荷守恒定律和动态位的定义,见表 2.

表 2 Maxwell 方程组、电荷守恒定律与动态位

Maxwell 方程组	$\nabla \times \boldsymbol{E} + \partial \boldsymbol{B} / \partial t = 0$	$\mathrm{d}E + \partial B / \partial t = 0$	$\mathrm{d}F = 0$
	$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$	$\mathrm{d}B = 0$	
	$\nabla \times \boldsymbol{H} - \partial \boldsymbol{D} / \partial t = \boldsymbol{J}$	$\mathrm{d}H - \partial D / \partial t = J$	$\mathrm{d}G = \Gamma$
	$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$	$\mathrm{d}D = \rho$	
电荷守恒	$\nabla \cdot \boldsymbol{J} + \partial \rho / \partial t = 0$	$\mathrm{d}J = \partial \rho / \partial t = 0$	$\mathrm{d}\Gamma = 0$
动态位	$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$	$B = \mathrm{d}A$	$\mathrm{d}\Omega = F$
	$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \partial \boldsymbol{A} / \partial t$	$E = -\mathrm{d}\varphi - \partial A / \partial t$	

3.2 电磁量的交界面条件

在 M^4 时取 2 维、3 维和 4 维子流形 V^2、V^3 和 V^4,则由 Stokes 公式(5) 及式(21) ~ (24) 可以得到积分形式的电磁场基本方程:

$$\left\{\begin{array}{l} \int_{\partial V^2} \Omega = \int_{V^2} F, \quad \int_{\partial V^3} G = \int_{V^3} \Gamma \\ \int_{\partial V^3} F = 0 \\ \int_{\partial V^4} \Gamma = 0 \end{array}\right. \tag{25}$$

式(25) 中诸式与式(7) 相似,从而 Ω、G、F 和 Γ 的交界面条件可由式(16) 确定,或者说,电磁

量的交界面条件由式(16)统一地给出。具体地，有

$$
\begin{cases}
\Omega^{+}_{i_1} = \Omega^{-}_{i_1} & (26)\\
G^{+}_{i_1, i_2} = G^{-}_{i_1, i_2} & (27)\\
F^{+}_{i_1, i_2} = F^{-}_{i_1, i_2} & (28)\\
\Gamma^{+}_{i_1, i_2, i_3} = \Gamma^{-}_{i_1, i_2, i_3} & (29)
\end{cases}
$$

式中，i_1、i_2、i_3 均取自{0，1，2，3}，式(26)～(29)为四维 Minkowski 时空流形中诸电磁量的交界面条件。

为了得到 φ、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 等电磁量的交界面条件，只要将式(26)～(29)按表 1，2 展开即可。

1）φ 与 A 的交界面条件

在式(26)中，取 $i_1 = 0$，得

$$\varphi^{+} = \varphi^{-}$$

它表示 φ 在交界面两侧对应点上相等。取 $i_1 = 1$，

$$A_1^{+} = A_1^{-}$$

注意到此时 A_1 为切向分量，故 A 的切向分量连续。

2）$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的交界面条件

在式(28)中，取 $i_1 = 0$，$i_2 = 1$，得

$$E_1^{+} = E_1^{-}$$

由于 E_1 是切向分量，故 $\boldsymbol{E}$ 的切向分量连续。再取 $i_1 = 2$，$i_2 = 3$，得

$$B_1^{+} = B_1^{-}$$

由于 B_1 是 $\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3$ 的系数，它是面元 $\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3$ 的法向分量，故 $\boldsymbol{B}$ 的法向分量连续。

同样可以分析 $\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{J}$ 的连续性条件，结果均与已知结论相符。

4 结　论

由于外微分式能更好地、更统一地描述电磁量及其基本规律，诸电磁量的交界面条件在外微分式表示下具有同一形式是十分自然的。

本文的结果为研究电磁量的几何性质、求解用外微分式表示的电磁场边值问题提供了基础。

承蒙江泽佳教授审阅本文初稿并提出宝贵意见，作者谨表示衷心感谢。

参 考 文 献

1 云正清，俞集辉，谭邦定. Maxwell 方程组与电磁量的微分形式. 重庆大学学报，1994，17(1)：29～34

2 Stratton J A. Electromagnetic Theory. New York：McGraw-Hill Book Company，1941，34～38

3 陈省身，陈维桓. 微分几何讲义. 北京：北京大学出版社，1983，1～100