(12) 64－69

非光滑集函数多目标规划的对偶理论*

Dual Theory of Nonsmooth Multiobjective Programming with Set Functions

孙 美**　　段虞荣　　O221.2
Sun Mei　　Duan Yurong
(重庆大学系统工程及应用数学系，重庆，630044)

A　**摘　要**　建立了非光滑集函数多目标规划的 Wolfe 型和 Mond-Weir 型对偶规划，讨论了关于有效解的弱对偶定理、直接对偶定理和逆对偶定理。

关键词　集函数；非光滑；多目标规划；对偶理论
中国图书资料分类法分类号　O224

ABSTRACT　In this paper, for a nonsmooth multiobjective programming with set functions, Wolfe type duality and Mond-Weir type duality are established. Weak dual theorem, direct dual theorem and inverse dual theorem about efficient solution are discussed.

KEYWORDS　set function; nonsmooth; multiobjective programming; dual theory

0　引　　言

1979年，在[1]中 Morris 引入了测度空间集函数的可微性和凸性概念，并研究了单目标集函数的最优化问题及 Lagrange 对偶问题，最近几年，对集函数的最优化问题研究较为活跃，可参见文献[2-9]. 集函数多目标规划的对偶理论的文献罕见，且多是对 Lagrange 对偶的研究，至于非光滑集函数多目标规划的对偶理论则更少。本文针对非光滑集函数多目标规划，建立了 Wolfe 型和 Mond-Weir 型对偶规划，分别讨论了关于有效解的对偶理论。

我们考虑下述集函数多目标规划：

$$
(\mathrm{P})\quad \begin{cases} \min\ F(\Omega)=(F_1(\Omega),\cdots,F_n(\Omega))^T \\ \text{s.t.}\ G_j(\Omega)\leqslant 0,\ j=1,\cdots,m \\ \qquad \Omega\in\varphi \end{cases}
$$

其中 $F_i:\varphi\to R, i=1,\cdots,n, G_j:\varphi\to R, j=1,\cdots,m$ 都是弱* 连续的凸集函数，$\varphi\subset\Gamma$ 为 Γ 的凸子集族。设 $G(\Omega)=(G_1(\Omega),\cdots,G_m(\Omega))^T, S=\{\Omega|G(\Omega)\leqslant 0,\Omega\in\varphi\}$，在本文中设 (X,Γ,μ) 是一有限无源测度空间，$L_1(X,\Gamma,\mu)$ 是可分的。

* 收文日期　1992－11－03
** 作者现在首钢总公司软件研究所工作

1 定义和引理

在有限无源测度空间(X,Γ,μ)中，每个$\Omega\in\Gamma$可视为它的特征函数$\chi_\Omega\in L_\infty(X,\Gamma,\mu)\subset L_1$，且$\Gamma$视为$L_\infty(X,\Gamma,\mu)=L^\infty$的一个子集$\chi_\Gamma=\{\chi_\Omega|\Omega\in\Gamma\}$. 对一个凸集函数$F:\varphi\to R$，当$\chi_\Omega=\chi_\Lambda,\mu-a.e.$，我们认为$F(\Omega)=F(\Lambda)$，因此$F$可认为是$L^\infty$的子集，$\chi_\varphi=\{\chi_\Omega|\Omega\in\varphi\}$上的一个函数. 由文献[1]中命题 3.2 和引理 3.3 可得下述引理 1.

引理 1　对任意Ω，$\Lambda\in\Gamma,\lambda\in[0,1]$，都存在$\Gamma$中的序列$\{\Omega_n\}$和$\{\Lambda_n\}$使得

$$\chi_{\Omega_n}\xrightarrow{w^*}\lambda\chi_{\Omega\setminus\Lambda}\quad 和\quad \chi_{\Lambda_n}\xrightarrow{w^*}(1-\lambda)\chi_{\Lambda\setminus\Omega}\tag{1}$$

$$\chi_{\Omega_n\cup\Lambda_n\cup(\Omega\cap\Lambda)}\xrightarrow{w^*}\lambda\chi_\Omega+(1-\lambda)\chi_\Lambda\tag{2}$$

我们称满足(1)和(2)的序列$\{V_n=\Omega_n\cup\Lambda_n\cup(\Omega\cap\Lambda)\}$为关于$(\Omega,\Lambda,\lambda)$的 Morris 序列。

定义 1　Γ的子集族φ称为是凸的，若对任何$(\Omega,\Lambda,\lambda)\in\varphi\times\varphi\times[0,1]$和相应的$\Gamma$中的 Morris 序列$\{V_n\}$，存在子序列$\{V_{n_k}\}$，使得

$$V_{n_k}=\Omega_{n_k}\cup\Lambda_{n_k}\cup\{\Omega\cap\Lambda\}\in\varphi\qquad\forall n_k$$

定义 2　集函数$F:\varphi\to R$称为在凸集族$\varphi\in\Gamma$上是凸的(严格凸的)，若对任何$(\Omega,\Lambda,\lambda)\in\varphi\times\varphi\times[0,1](\Omega\neq\Lambda)$，存在一个 Morris 序列$\{V_n\}\subset\varphi$，使得：

$$\overline{\lim_{n\to R}}F(V_n)\leqslant(<)\lambda F(\Omega)+(1-\lambda)F(\Lambda)$$

定义 3　设集函数$F:\Gamma\to R^*=R\cup\{\infty\}$，且

$$\mathrm{Dom}F=\{\Omega\in\Gamma|F(\Omega)\text{ 是有限的}\}\equiv\varphi$$

(i) F称为在$\Omega\in\varphi$处弱*下半连续(弱*上半连续)，如果对任何满足$\chi_{\Omega_n}\xrightarrow{w^*}\chi_\Omega$的序列$\Omega_n\in\varphi$，有　$-\infty<F(\Omega)\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}F(\Omega_n)(+\infty>F(\Omega)\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}F(\Omega_n))$

(ii) F称为在$\Omega\in\varphi$处弱*连续，如果对任何满足$\chi_{\Omega_n}\xrightarrow{w^*}\chi_\Omega$的序列$\Omega_n\in\varphi$，有

$$F(\Omega)=\lim_{n\to\infty}F(\Omega_n)$$

定义 4　$\Omega^*\in S$称为(P)的有效解，若不存在$\Omega\in S$，使得$F(\Omega)\leqslant F(\Omega^*)$，且$F(\Omega)\neq F(\Omega^*)$.

定义 5　称$f\in L_1(X,\Gamma,\mu)$为凸集函数F在$\Omega_0\in\Gamma$处的次梯度，如果f满足下列不等式　$F(\Omega)\geqslant F(\Omega_0)+\langle\chi_\Omega-\chi_{\Omega_0},f\rangle,\forall\,\Omega\in\Gamma$

我们把集函数F在Ω_0处在次梯度集合记为$\partial F(\Omega_0)$，称为F在Ω_0处的次微分，如果$\partial F(\Omega_0)\neq\Phi$，称$F$在$\Omega_0$处可次微分的。

在[9]中定理 3.5 知，对于弱*下半连续凸集函数F在其凸有效域φ上有$\partial F(\Omega)\neq\Phi$.

显然，Ω^*为$\min_{\Omega\in\Gamma}F(\Omega)$的最优解充要条件是$0\in\partial F(\Omega^*)$，我们称函数$F:\Gamma\to R\cup\{\infty\}$是正常的，如果在$\Gamma$上$F\not\equiv\dot{\infty}$.

文[7]中的定理 12 可把$a=(a_1,\cdots,a_n)$规范化，规范化后得下述引理 2.

引理 2　在问题(P)中，设φ是Γ的凸子集族，$F_i,i=1,\cdots,n,G_j,j=1,\cdots,m$，都是$\Gamma$上的正常凸集函数，且$\Omega_0$为$(P)$的有效解，假设对每个$i\in(1,\cdots,n)$有一$\Omega_i\in\varphi$使得

$$
\begin{array}{ll}
G_k(\Omega_{ij}) < 0 & k = 1,\cdots,m \\
F_j(\Omega_i) < F_j(\Omega_0) & j = 1,\cdots,n, j \neq i
\end{array} \tag{3}
$$

再设 $F_1,\cdots,F_n,G_1,\cdots,G_m$，可能除一外，都是在 φ 上的弱* 连续集函数，且 $\overline{\varphi}$(φ 的弱* 闭）有相对内点，那么，存在 $\alpha = (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1, \alpha \in R_+^n, \lambda = (\lambda_1,\cdots,\lambda_m), \lambda \in R_+^m$，使得

(i) $\lambda G(\Omega_0) = 0$

(ii) $0 \in \alpha \cdot \partial F(\Omega_0) + \lambda \cdot \partial G(\Omega_0) + N_\varphi(\Omega_0)$

其中 $\partial F(\Omega_0) = (\partial F_1(\Omega_0),\cdots,\partial F_n(\Omega_0))^T$，$\partial G(\Omega_0)$ 的含义相同，$N_\varphi(\Omega_0) = \{f \in L_1(X,\Gamma,\mu) | \langle \chi_\Omega - \chi_{\Omega_0}, f\rangle \leqslant 0, \forall\ \Omega \in \varphi\}$.

引理 3[8]　设 $F:\Gamma \to R$ 是在 φ 上严格凸的，那么对 $\Omega \in \varphi$ 和 $f \in \partial F(\Omega)$，有

$$F(\Lambda) - F(\Omega) > \langle \chi_\Lambda - \chi_\Omega, f\rangle,\quad \forall\ \Lambda \neq \Omega \in \varphi$$

2　非光滑集函数多目标规划的对偶理论

a. 我们首先考虑多目标规划(P)的 Wolfe 型对偶规划

$$
(D_1)\quad \begin{cases}
\max\ F(\Omega) + \ll \lambda G(\Omega) \gg \\
\text{s.t. } 0 \in \alpha \cdot \partial F(\Omega) + \lambda \cdot \partial G(\Omega) + N_\varphi(\Omega) \\
\qquad \Omega \in \varphi, \lambda \in R_+^m, \sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1, \lambda \in R_+^m
\end{cases}
$$

其中 $F(\Omega) = (F_1(\Omega),\cdots,F_n(\Omega))^T$，$\ll \lambda G(\Omega) \gg = (\lambda G(\Omega),\cdots,\lambda G(\Omega))_n^T$，其它与前面含义相同。

定理 1(弱对偶)　设 Ω 和 (Λ,α,λ) 分别是(P)和(D_1)的可行解，并设 F 是严格凸的，则当 $\Omega \neq \Lambda$ 时　$\alpha F(\Omega) > \alpha \cdot F(\Lambda) + \lambda G(\Lambda)$，$F(\Omega) > F(\Lambda) + \ll \lambda G(\Lambda) \gg$

证　因为 (Λ,α,λ) 是(D_1)的可行解，则存在 $v \in \partial F(\Lambda)$，$u \in \partial G(\Lambda)$，$w \in N_\varphi(\Lambda)$，使得　$\lambda v + \lambda u + w = 0$

又 F 是严格凸集函数，由引理 3 知　$F(\Omega) - F(\Lambda) > \langle \chi_\Omega - \chi_\Lambda, v\rangle$

那么有：

$$
\begin{aligned}
&\alpha(\Omega) - \alpha F(\Lambda) - \lambda G(\Lambda) \\
&> \alpha\langle \chi_\Omega - \chi_\Lambda, v\rangle - \lambda G(\Lambda) \\
&= -\lambda\langle \chi_\Omega - \chi_\Lambda, u\rangle - \langle \chi_\Omega - \chi_\Lambda, w\rangle - \lambda G(\Lambda) \\
&\geqslant -\lambda\langle \chi_\Omega - \chi_\Lambda, u\rangle - \lambda G(\Lambda) \\
&\geqslant -\lambda G(\Omega)
\end{aligned}
$$

又 Ω 是(P)的可行解，故 $-\lambda G(\Omega) \geqslant 0$.

从而　$$\alpha F(\Omega) > \alpha F(\Lambda) + \lambda G(\Lambda)$$

又 $\alpha \in R_+^n \backslash \{0\}$，$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1$，故 $F(\Omega) > F(\Lambda) + \ll \lambda G(\Lambda) \gg$.

证毕

定理 2(直接对偶)　设 Ω^* 是(P)的有效解，并且(P)满足引理 2 中的条件，那么存在 (α^*,λ^*) 使得 $(\Omega^*,\alpha^*,\lambda^*)$ 是(D_1)的可行解，且 $\lambda^* G(\Omega^*) = 0$，若再设 F 是严格凸的，则$(\Omega^*$，

α^*,λ^*）是 (D_1) 的有效解，(P) 和 (D_1) 有相同的极值。

证　因为 Ω^* 是 (P) 的有效解，(P) 满足引理 2 中的条件，由引理 2 知，存在 $(\alpha^*,\lambda^*)\in R_+^{p+m}$，$\sum_{i=1}^{p}\alpha_i^*=1$，使得

$$\lambda^*G(\Omega^*)=0$$

$$0\in\alpha^{*T}\partial F(\Omega^*)+\lambda^{*T}\partial G(\Omega^*)+N_\varphi(\Omega^*)$$

即 $(\Omega^*,\alpha^*,\lambda^*)$ 是 (D_1) 的可行解。

下面证明 $(\Omega^*,\alpha^*,\lambda^*)$ 是 (D_1) 的有效解，若不然，则存在 (D_1) 的可行解 (Ω,α,λ)，使得

$$\begin{aligned}&F(\Omega)+\ll\lambda G(\Omega)\gg-F(\Omega^*)\\&=F(\Omega)+\ll\lambda G(\Omega)\gg-F(\Omega^*)-\ll\lambda^*G(\Omega^*)\gg\\&\geqslant 0\end{aligned}\tag{4}$$

且等号不成立。

显然，$\Omega\neq\Omega^*$，若不然，(4) 式变为 $\ll\lambda G(\Omega)\gg\geqslant 0$，即 $\lambda G(\Omega)\geqslant 0$. 而 $\lambda\in R_+^m$，$\Omega=\Omega^*$ 是 (P) 的有效解，即 $G(\Omega)=G(\Omega^*)\leqslant 0$，故 $\lambda G(\Omega)\leqslant 0$，从而 $\lambda G(\Omega)=0$，这样 (4) 等号成立，矛盾！

因 $\alpha\in R_+^p$，$\sum_{i=1}^{p}\alpha_i=1$，故 (4) 式变为　$\alpha F(\Omega)+\lambda G(\Omega)\geqslant\alpha F(\Omega^*)$

而由定理 1 知　$\alpha F(\Omega^*)>\alpha F(\Omega)+\lambda G(\Omega)$，矛盾！从而说明 $(\Omega^*,\alpha^*,\lambda^*)$ 是 (D_1) 的有效解。

证毕

定理 3（逆对偶）　设 $(\Lambda^*,\alpha^*,\lambda^*)$ 是 (D_1) 的可行解，若 F 是严格凸的，并存在 (P) 的可行解 Ω^* 使 $\alpha^*F(\Omega^*)\leqslant\alpha^*F(\Lambda^*)+\lambda^*G(\Lambda^*)$，则 $\Omega^*=\Lambda^*$，且 Ω^* 是 (P) 的有效解，同时，$(\Lambda^*,\alpha^*,\lambda^*)$ 也是 (D_1) 的有效解。

证　假若 $\Omega^*\neq\Lambda^*$，根据定理 1 得　$\alpha^*F(\Omega^*)>\alpha^*F(\Lambda^*)+\lambda^*G(\Lambda^*)$

这与已知条件矛盾，因此 $\Omega^*=\Lambda^*$.

又由定理 1 和已知条件可得

$$\alpha^*F(\Omega)>\alpha^*F(\Omega^*),\quad\forall\,\Omega\in S,\Omega\neq\Omega^*$$

若 Ω^* 不是 (P) 的有效解，则存在 $\Omega'\in S'$ 使得

$F(\Omega')\leqslant F(\Omega^*)$ 且 $F(\Omega')\neq F(\Omega^*)$，于是得

$\alpha^*F(\Omega')\leqslant\alpha^*F(\Omega^*)$，这与上面推导结果矛盾。故 Ω^* 是 (P) 的有效解。

现证 $(\Lambda^*,\alpha^*,\lambda^*)$ 是 (D_1) 的有效解，若不然，则存在 (D_1) 的可行解 (Λ,α,λ) 使得：

$$F(\Lambda)+\ll\lambda G(\Lambda)\gg\geqslant F(\Lambda^*)+\ll\lambda^*G(\Lambda^*)\gg\tag{5}$$

且等号不成立。

显然 $\Lambda\neq\Lambda^*$，否则，由 $\Omega^*=\Lambda^*$，$\lambda^*G(\Lambda^*)+\alpha^*F(\Lambda^*)\geqslant\alpha^*F(\Omega^*)$，得

$$0\geqslant\lambda^*G(\Lambda^*)=\lambda^*G(\Omega^*)\geqslant 0$$

从而 $\lambda^*G(\Lambda^*)=0$，由 (5) 和 $\Lambda=\Lambda^*=\Omega^*$，得

$$0\geqslant\lambda^*G(\Lambda^*)=\lambda^*G(\Lambda)\geqslant 0$$

即有 $\lambda G(\Lambda)=0$，故 (5) 式变为　$F(\Lambda)\geqslant F(\Lambda^*)$

这与 $\Lambda=\Lambda^*$ 及等号不成立相矛盾，故 $\Lambda\neq\Lambda^*$.

再根据定理 1 和 $\lambda^* G(\Lambda^*) = 0$ 得

$$F(\Lambda) + \ll \lambda G(\Lambda) \gg < F(\Lambda^*) = F(\Lambda^*) + \ll \lambda^* G(\Lambda^*) \gg$$

这与(5)式矛盾!从而$(\Lambda^*, \alpha^*, \lambda^*)$是$(D_1)$的有效解。

证毕

b. 下面对应于(P)问题,建立如下非光滑集函数多目标规划的 Mond-Weir 型对偶规划

$$(D_2)\quad \begin{cases} \max\ F(\Omega) \\ \text{s.t.}\ \ 0 \in \alpha \cdot \partial F(\Omega) + \lambda \cdot \partial G(\Omega) + N_\varphi(\Omega) \\ \qquad \lambda \cdot G(\Omega) \geqslant 0, \Omega \in \varphi \\ \qquad \alpha \in R_+^p, \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1, \lambda \in R_+^m \end{cases}$$

其中符号含义与前面相同。

定理 4(弱对偶)　设Ω和$(\Lambda, \alpha, \lambda)$分别是$(P)$和$(D_2)$的任意可行解,假设$F$是严格凸集函数,则当$\Omega \neq \Lambda$时有$\alpha F(\Omega) > \alpha F(\Lambda), F(\Omega) > F(\Lambda)$

证　因为$(\Lambda, \alpha, \lambda)$是$(D_2)$的可行解,则存在$v \in \partial F(\Lambda), u \in \partial G(\Lambda), w \in N_\varphi(\Lambda)$,使得　$\lambda v + \lambda u + w = 0$

以及　$\lambda G(\Lambda) \geqslant 0$

又由Ω的可行性知　$\lambda G(\Omega) \leqslant 0$,故

$$-\lambda G(\Omega) + \lambda G(\Lambda) \geqslant 0$$

又F是严格凸的,由引理 3 知

$$F(\Omega) - F(\Lambda) > < \chi_\Omega - \chi_\Lambda, v >$$

由上述一些不等式,可得:

$$\begin{aligned} & \alpha F(\Omega) - \alpha F(\Lambda) > \alpha < \chi_\Omega - \chi_\Lambda, v > \\ & = -\lambda \langle \chi_\Omega - \chi_\Lambda, u \rangle - < \chi_\Omega - \chi_\Lambda, w > \\ & \geqslant -\lambda \langle \chi_\Omega - \chi_\Lambda, u \rangle \\ & \geqslant -\lambda G(\Omega) + \lambda G(\Lambda) \\ & \geqslant 0 \end{aligned}$$

即$\alpha F(\Omega) > \alpha F(\Lambda)$,又$\alpha \in R_+^p \backslash \{0\}$,故

$$F(\Omega) > F(\Lambda)$$

证毕

定理 5(直接对偶)　设Ω^*是(P)的一有效解,且(P)满足引理 2 中的条件,那么存在$(\bar{\alpha}, \bar{\lambda})$使得$(\Omega^*, \bar{\alpha}, \bar{\lambda})$是$(D_2)$的可行解,且$\bar{\lambda} G(\Omega^*) = 0$,若再设$F$是严格凸集函数,则$(\Omega^*, \bar{\alpha}, \bar{\lambda})$也是$(D_2)$的有效解。

证　由引理 2 知,存在$(\bar{\alpha}, \bar{\lambda}) \in R_+^{p+m}$, $\sum_{i=1}^{p} \bar{\alpha}_i = 1$,使得$(\Omega^*, \bar{\alpha}, \bar{\lambda})$是$(D_2)$可行解,且$\bar{\lambda} G(\Omega^*) = 0$.

下面证明$(\Omega^*, \bar{\alpha}, \bar{\lambda})$是$(D_2)$的有效解,若不然,则存在$(D_2)$的可行解$(\Omega, \alpha, \lambda)$使得

$$F(\Omega) \geqslant F(\Omega^*) \quad 且 \quad F(\Omega) \neq F(\Omega^*)$$

显然$\Omega \neq \Omega^*$

又$\alpha \in R_+^p \backslash \{0\}$,故$\alpha F(\Omega) \geqslant \alpha F(\Omega^*)$

而由定理 4 知 $\alpha F(\Omega) < \alpha F(\Omega^*)$，矛盾！

这说明$(\Omega^*, \bar{\alpha}, \bar{\lambda})$是$(D_2)$的有效解。

证毕

定理 6(逆对偶)　设$(\Lambda^*, \alpha^*, \lambda^*)$是$(D_2)$的可行解，若 F 是严格凸集函数，并且存在(P)的可行解 Ω^* 使 $\alpha^* F(\Omega^*) \leqslant \alpha^* F(\Lambda^*)$，则 $\Omega^* = \Lambda^*$，且 Ω^* 是(P)的有效解，同时$(\Lambda^*, \alpha^*, \lambda^*)$也是$(D_2)$的有效解。

证　先证 $\Omega^* = \Lambda^*$，假若 $\Omega^* \neq \Lambda^*$，根据定理 4 得　$\alpha^* F(\Omega^*) > \alpha^* F(\Lambda^*)$
这与已知条件矛盾，因此 $\Omega^* = \Lambda^*$

又由定理 4 和已知条件可得　$\alpha^* F(\Omega) > \alpha^* F(\Omega^*)$，$\forall \Omega \in S, \Omega \neq \Omega^*$
若 Ω^* 不是(P)的有效解，则存在 $\Omega' \in S$ 使得　$F(\Omega') \leqslant F(\Omega^*)$　且　$F(\Omega') \neq F(\Omega^*)$
于是得　$\alpha^* F(\Omega') \leqslant \alpha^* F(\Omega^*)$

这与上面推导结果矛盾。故 Ω^* 是(P)的有效解。

最后证明$(\Lambda^*, \alpha^*, \lambda^*)$是$(D_2)$的可行解，若不然，则存在$(D_2)$的可行解$(\Lambda, \alpha, \lambda)$使 $F(\Lambda^*) \leqslant F(\Lambda)$，且等号不成立。
显然 $\Lambda \neq \Lambda^*$

而 Ω^* 是(P)的可行解，由定理 4 知　$F(\Lambda) - F(\Lambda^*) = F(\Lambda) - F(\Omega^*) < 0$
矛盾！这说明$(\Lambda^*, \alpha^*, \lambda^*)$是$(D_2)$的有效解。

证毕

参 考 文 献

1 Morris R. J. Optimal constrained selection of measurable subsets. J. Math. Anal. Appl. ,1979,70(2):546～562

2 Lai H C. Yang S S, Hwang G R. Duality in mathematical programming of set function "On Fenchel duality theorem". J. Math. Anal. Appl. ,1983,95(1):223～234

3 Lai H C, Yang S S. Saddle point and duality in optimization theory of convex set functions. J. Austral. Math. Soc. (Ser. B),1982,24(1):130～137

4 Chou J H, Hsia W S, Lee T Y. On multiple objective programming problems with set functions. J. Math. Anal. Appl. ,1985,105(2):383～394

5 Hsia W S, Lee T Y. Lagrange function and duality theorem in multiobjective programming with set functions J. O. T. A. ,1988,57(1):239～251

6 Hsia W S. Lee T Y. Lee J Y. Lagrange multiplier theorem of multiobjective programming problems with set functions J. O. T. A. ,1991,70(1):137～155

7 Lai H C. Hang Chin. Moreau-Rockafellar type theorem for convex set function. J. Math. Anal. Appl. ,1988,132:558～571

8 Lai H C, Lin L J. Optimality for set functions with values in ordered vector spaces. J. O. T. A. ,1989,63(3):371～389

9 Lai H C, Lin L J. The Fenchel-Moreau theorem for set functions. Proc. Amer. Math. Soc. ,1988,103(1):85～90

10 Mond B, Weir T. "Generalized Concavity and Duality", Generalized Concavity in Optimization and Economics. New York and London,1981:263～279

11 游兆永等. 非光滑多目标规划的对偶理论，西安交通大学学报，1990,24(6):29～34