1995 年 1 月　　重庆大学学报　（自然科学版）　　Vol. 18, №. 1
第 18 卷第 1 期　　Journal of Chongqing University (Natural Science Edition)　　Jan. 1995

(5) 27-32

关于 Banach 空间中 Schauder 分解序列的特征指标 $r_G(V)$——（Ⅱ）*

On the Characteristic Index $r_G(V)$ of Schauder Decomposed Sequence in Banach Space——（Ⅱ）

傅　强
Fu Qiang
（重庆大学系统工程及应用数学系，重庆，630044）

O177.2

A

摘　要　讨论了作者得到的关于特征指标 $r_G(V)$ 与空间分解定理的若干条件及相关性质。给出了 Schauder 分解序列相应的坐标射影算子可扩充到全空间的充要条件。

关键词　特征指标 $r_G(V)$；Schauder 分解序列；射影算子
中国图书资料分类法分类号　O177.2　巴拿赫空间，邵德尔分解序列

ABSTRACT　Some conditions and the related properies of theorem of characteristic index $r_G(V)$ and space decomposction which the author obtained are discussed in this paper. The sufficient and necessary condition that the associated sequence of coordinate projections of schauder decomposed sequence can be extended to total space is given.

KEYWORDS　characteristic index $r_G(V)$; schauder decomposed sequence; coordiate projeetion; schauder decomposed sequence

在[1]中，作者讨论了 $r_G(V)>0$ 与空间分解的相互关系，[1]定理 5 所罗列的条件是有趣的，本文对这些条件作细致的讨论。

定义 1　Banach 空间 E 的 Schauder 分解序列 $\{G_n\}$ 称为收缩型 Schauder 分解序列，如果 $[\bigcup_{n=1}^{\infty} v_n^*([\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n]^*)] = [\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n]^*$.

定义 2　对偶 Banach 空间 E^* 中子空间序列 $\{\Gamma_n\}$ 称为 E^* 中的一个 w^*-Schauder 分解序列，如果 $\{\Gamma_n\}$ 为 $[\widetilde{\bigcup_{n=1}^{\infty}\Gamma_n}]$ 的一个 w^*-Schauder 分解。这种分解是基于 $\sigma(E^*,E)$ 拓扑的，$[\widetilde{\bigcup_{n=1}^{\infty}\Gamma_n}]$ 表示由 $\{\Gamma_n\}$ 张成的 E^* 的 $\sigma(E^*,E)$ 一闭线性子空间，它与 $[\bigcup_{n=1}^{\infty}\Gamma_n]$ 的 $\sigma(E^*,E)$ 一闭包是一致的。

由定理 2 易得 $\{\Gamma_n\}$ 为 $[\widetilde{\bigcup_{n=1}^{\infty}\Gamma_n}]$ 的 w^*-Schauder 分解的充要条件是 $\forall f \in [\widetilde{\bigcup_{n=1}^{\infty}\Gamma_n}]$，有 $f = w^*\text{-}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} w_i(f)$，此处 $w_i \in L(E^*,E^*)$，w_i 在 E^* 上是 w^* 连续的。

---

* 收文日期　1993-11-26

定理 1 假设同[1]定理 5，以下(1)′(2)′可以导出[1]定理 5(1)—(14)，它们与(1)—(14)等价的充要条件是$\{G_n\}$为收缩型的 Schauder 分解序列。

(1)′ 对$\forall f\in E^*$，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n^*(f)$收敛；

(2)′ $E^*=[\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n]^{\perp}\oplus[\bigcup_{n=1}^{\infty}v_n^*(E^*)]$

证明 (2)′⇒(3) 显然，因为$E^*=[\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n]^{\perp}\oplus[\bigcup_{n=1}^{\infty}v_n^*(E^*)]$，从而$[\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n]^{\perp}+[\bigcup_{n=1}^{\infty}v_n^*(E^*)]$为闭的。

(1)′⇔(2)′是[1]定理 3 的结论。

若$\{G_n\}$为E的一个收缩型 Schauder 分解序列，则$\forall\varphi\in[\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n]^*$，有$\sum_{n=1}^{\infty}v_n^*(\varphi)$收敛于$\varphi$.

如果[1]定理 5(3)成立，则$[\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n]^{\perp}+[\bigcup_{n=1}^{\infty}v_n^*(E^*)]$在$E^*$中为闭，注意$V=\{f\in E^*\,|f|_{[\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n]}\in[\bigcup_{n=1}^{\infty}v_n^*([\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n]^*)]\}$[1]，由收缩的定义$[\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n]^*=[\bigcup_{n=1}^{\infty}v_n^*([\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n]^*)]$，从而$E^*=V$，由[1]定理 5(3)，有$V=[\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n]^{\perp}\oplus[\bigcup_{n=1}^{\infty}v_n^*(E^*)]$，故(2)′成立。

反过来，如果(1)′或(2)′成立，则$\forall f\in E^*$，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n^*(f)$收敛，由(4)，限制映射$u:f\to f|_{[\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n]}$为同构，从而$\forall\varphi\in[\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n]^*$，有$\sum_{n=1}^{\infty}v_n^*(\varphi)$收敛于$\varphi$，这表明$[\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n]^*=[\bigcup_{n=1}^{\infty}v_n^*([\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n])^*]$为收缩型的 Schauder 分解序列。 证毕

由定理 1，我们便得到了 Schauder 分解序列为收缩的一系列充要条件，实际上，这一定理给出了 Schauder 分解序列为收缩型的若干判别准则。

定理 2 设$\{G_n,v_n\}$为E的任一广义双正交系，$v_n\in L(E,E)$，$n=1,2,3,\cdots$，如果$\{G_n\}$为一个 Schauder 分解序列，则由[1]定理 5 的(1)，(2)，(4)，(8)—(13)以及前一定理的(1)′(2)′均可推出$\{v_n^*(E^*)\}$为$[\bigcup_{n=1}^{\infty}v_n^*(E^*)]$的一个 Schauder 分解。

证明 如有(1)，则$\{v_n^*(E^*)\}\approx\{\varphi_n^*([\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n]^*)\}$，

$\because\forall\varphi\in[\bigcup_{n=1}^{\infty}\varphi_n^*([\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n])$，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n^*(\varphi)]$收敛于$\varphi$，$\therefore\forall f\in[\bigcup_{n=1}^{\infty}v_n^*(E^*)]$，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n^*(f)$敛于$f$.

(4) 明显地是含有结论。

由[1]引理 2(2)⇔(4)，故(2)亦然。

若有(8)、(9)或定理 1(1)′，则$\sup_{1\leq n<+\infty}\|s_n^*\|<+\infty$，由(2)$\{v_n^*(E^*)\}$为$[\bigcup_{n=1}^{\infty}v_n^*(E^*)]$的 Schauder 分解。

最后，若有(12)(13)及(2)′，则存在一个典则同构映射u，使得$\Gamma\cong E^*/[\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n]^{\perp}\equiv[\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n]^*$，该同构由$f\xrightarrow{u_1}f+[\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n]^{\perp}\xrightarrow{u_2}f|_{[\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n]}$表之，$u=u_1u_2$正好是限制映射，从而有(4)。

证毕

定理 3 E^*中每一个满足$E^*=[\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n]^{\perp}\oplus\Gamma$的子空间$\Gamma$必含有闭线性子空间$B=\{f$

$\in E^* \mid f = \sum_{i=1}^{\infty}{}^* v_i^*(f)\} \supset [\overset{\infty}{\underset{i=1}{U}} v_i^*(E^*)]$(此处 Γ 为[1]定理 5 所指，$\sum^*$ 表示求和是 $\sigma(E^*, E)$ 拓扑意义下的)。

证明　如果 $f \in B$，则对[1]定理 5 证明中定义的射影 τ，有 $\tau(f) = w^* - \lim_{n_\sigma} \sum_{i=1}^{n_\sigma} v_i^*(f)$ $= \sum_{i=1}^{\infty}{}^* v_i^*(f) = f$，故 $f \in \tau(E^*) = \Gamma$，从而 $B \subset \tau$.

现证 B 为闭的，$\{g_i\} \subset B, f \in E^*$，$\|g_i - f\| \to 0 (n \to \infty)$，由[1]定理 5(8)，

$$|s_n^*(f)(x) - f(x)|$$
$$\leqslant |s_n^*(f)(x) - s_n^*(g_i)(x)| + |s_n^*(g_i)(x) - g_i(x)| + |g_i(x) - f(x)|$$
$$\leqslant \sup_{1\leqslant n\leqslant +\infty} \|s_n^*\| \cdot \|f - g_i\| \cdot \|x\| + |s_n^*(g_i)(x) - g(x)| + \|f - g_i\| \cdot \|x\|$$

$\forall \varepsilon > 0$，取 i，使得 $\|f - g_i\| < \dfrac{\varepsilon}{2(1 + \sup\limits_{1\leqslant n\leqslant +\infty} \|s_n^*\|)\|x\|}$

取 $n_0 = n_0(i)$，使得 $|s_n^*(f)(x) - g_i(x)| < \varepsilon/2 \quad (n \geqslant n_0)$

故当 $n \geqslant n_0$ 时，有 $|s_n^*(f)(x) - f(x)| < \varepsilon$，从而 $f = \sum_{i=1}^{\infty} v_i^*(f)$，$f \in B$，故 B 为闭。

显然 $B \subset [\overset{\infty}{\underset{i=1}{U}} v_i^*(E^*)]$，由 w*-Schander 分解序列的定义，$B = [\overset{\infty}{\underset{i=1}{U}} v_i^*(E^*)]$ 的充要条件是 $\{v_i^*(E^*)\}$ 为 w*-Schander 分解序列。

定理 4　设 E 为 Banach 空间，$\{G_i, v_i\}$ 为一具广义双正交系，$\{G_i\}$ 为一 Schander 分解序列，codim$[\overset{\infty}{\underset{i=1}{U}} G_i] < +\infty$，则

(1) $r_{[\overset{\infty}{\underset{i=1}{U}} G_i]}([\overset{\infty}{\underset{i=1}{U}} v_i^*(E^*)]) > 0$

(2) 如下等价

(a) $\{v_i^*(E^*)\} \approx \{v_i^*([\overset{\infty}{\underset{i=1}{U}} G_i]^*)\}$

(b) $[\overset{\infty}{\underset{i=1}{U}} G_i]^\perp \cap [\overset{\infty}{\underset{i=1}{U}} v_i^*(E^*)] = \{0\}$

(c) $\{v_i^*(E^*)\}$ 为一 Schander 分解序列。

证明　(2) (a) → (c) 源于定理 1，(c) → (b) 显然。如有(b)，则因 codim$[\overset{\infty}{\underset{i=1}{U}} G_i]^\perp < +\infty$，故 $[\overset{\infty}{\underset{i=1}{U}} G_i]^\perp + [\overset{\infty}{\underset{i=1}{U}} v_i^*(E^*)]$ 在 E^* 中闭，由[1]定理 5(4)，限制映射 $u: f \to f|_{[\overset{\infty}{\underset{i=1}{U}} G_i]}$ 为 $[\overset{\infty}{\underset{i=1}{U}} v_i^*(E^*)]$ 到 $[\overset{\infty}{\underset{i=1}{U}} G_i]^*$ 的一个同构，从而有 $\{v_i^*(E^*)\} \approx \{v_i^*([\overset{\infty}{\underset{i=1}{U}} G_i]^*)\}$，(b) → (a).

(1) 如果 $[\overset{\infty}{\underset{i=1}{U}} G_i]^\perp \cap [\overset{\infty}{\underset{i=1}{U}} v_i^*(E^*)] = \{0\}$，则由 (2)(c) 及 [1] 定理 5(5)，$r_{[\overset{\infty}{\underset{i=1}{U}} G_i]}([\overset{\infty}{\underset{i=1}{U}} v_i^*(E^*)]) > 0$.

如果 $[\overset{\infty}{\underset{i=1}{U}} G_i]^\perp \cap [\overset{\infty}{\underset{i=1}{U}} v_i^*(E^*)] \neq \{0\}$，$\because \dim([\overset{\infty}{\underset{i=1}{U}} G_i]^\perp \cap [\overset{\infty}{\underset{i=1}{U}} v_i^*(E^*)] \leqslant \dim([\overset{\infty}{\underset{i=1}{U}} G_i]^\perp)$ $< +\infty$，所以有 $[\overset{\infty}{\underset{i=1}{U}} v_i^*(E^*)]$ 的子空间 V_2，使得 $[\overset{\infty}{\underset{i=1}{U}} v_i^*(E^*)] = V_2 \oplus ([\overset{\infty}{\underset{i=1}{U}} G_i]^\perp \cap$ $[\overset{\infty}{\underset{i=1}{U}} v_i^*(E^*)]$，令 $v_n|_{[\overset{\infty}{\underset{i=1}{U}} G_i]} = \varphi_n, n = 1,2,3,\cdots$，则 $[\overset{\infty}{\underset{i=1}{U}} \varphi_i([\overset{\infty}{\underset{i=1}{U}} G_i]^*)] \cap [\overset{\infty}{\underset{i=1}{U}} G_i]^\perp \subset \Gamma \cap$

$[\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i]^{\perp} = \Gamma \cap ([\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i]^{\perp} \cap [\bigcup_{i=1}^{\infty} v_i^*(E^*)]) = \{0\}$，故 $r_{[\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i]}([\bigcup_{i=1}^{\infty} \varphi_i^*([\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i]^*)) > 0$，从而 $r_{[\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i]}([\bigcup_{i=1}^{\infty} v_i^*(E^*)]) > 0$. 证毕

定理 5 设 E 为 Banach 空间，$\{G_n, v_n\}$ 为广义双正交序列，$v_n \in L(E,E)$，$n = 1,2,3,\cdots$，$\{G_n\}$ 为 Schander 分解序列，其相应的坐标射影算子列 $\{\varphi_n\} = \{v_n|_{[\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i]}\}$，则如下等价：

(1) $[\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i] + [\bigcup_{i=1}^{\infty} v_i^*(E^*)]_{\perp}$ 在 E 中是闭的，

(2) $\{w(G_i)\}$ 为 Schander 分解序列，且 $\{w(G_i)\} \approx \{G_i\}$，此处 w 为 E 到 $E/[\bigcup_{i=1}^{\infty} v_i^*(E^*)]_{\perp}$ 的典则映射，

(3) $r_{[\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i]}([\bigcup_{i=1}^{\infty} v_i^*(E^*)]) > 0$

(4) $\pi([\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i]^{\perp}) + [\bigcup_{i=1}^{\infty} v_i^*(E^*)]^{\perp}$ 在 E^{**} 中闭，

(5) $[\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i]$ 到 $[\bigcup_{i=1}^{\infty} v_i^*(E^*)]^-$ 的典则映射为一同构映射。

证明 $\because \{G_i\}$ 为 E 的 Schander 分解序列，则 $\forall x \in [\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i] \cap [\bigcup_{i=1}^{\infty} v_i^*(E^*)]_{\perp}$，有 $x = \sum_{i=1}^{\infty} v_i(x)$，但 $v_n(x) = 0, n = 1,2,3,\cdots$，故 $x = 0$，所以 $[\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i] \cap [\bigcup_{i=1}^{\infty} v_i^*(E^*)]_{\perp} = \{0\}$.

假设有(1)，由闭图像定理，由 $[\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i] \oplus [\bigcup_{i=1}^{\infty} v_i^*(E^*)]_{\perp}$ 到 $[\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i]$ 的自然射影是连续的，因而有界，故 $\exists\, C > 0$，使得 $\|x\| \leqslant C\|x+y\|$ $(x \in [\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i], y \in [\bigcup_{i=1}^{\infty} v_i^*(E^*)]_{\perp})$，从而 $\|x\| \leqslant C \inf_{y \in [\bigcup_{i=1}^{\infty} v_i^*(E^*)]_{\perp}} \|x+y\| = C\|\omega(x)\| \leqslant C\|x\|$ $\quad (*)$

则(*)式可见，$\omega|_{[\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i]}$ 为一同构，故必有 $\{\omega(G_i)\} \approx \{G_i\}$，这正好是(2).

如果有(2)，$\omega|_{[\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i]}$ 为一同构，故 $\exists\, C > 0$，使得 $\frac{1}{C}\|x\| \leqslant \|\omega(x)\| \leqslant C\|x\|$，这表明由 $[\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i] + [\bigcup_{i=1}^{\infty} v_i^*(E^*)]_{\perp}$ 到 $[\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i]$ 的自然射影是连续的，因此 $[\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i] + [\bigcup_{i=1}^{\infty} v_i^*(E^*)]_{\perp}$ 必在 E 中为闭，(1) 成立。

注意 $\inf_{y \in [\bigcup_{i=1}^{\infty} v_i^*(E^*)]_{\perp}} \|x+y\| = \sup_{\substack{f \in [\bigcup_{i=1}^{\infty} v_i^*(E^*)] \\ \|f\| \leqslant 1}} \quad (x \in E \setminus [\bigcup_{i=1}^{\infty} v_i^*(E^*)]_{\perp})(**)$，由(*)式与(**)式，有 (1)$\Leftrightarrow$(3).

至于(3)$\Leftrightarrow$(4)$\Leftrightarrow$(5) 证明与[1] 定理 5 类似。 证毕

下面一个结果与对偶 Banach 空间 E^* 的 w^*-Schauder 分解序列有关。

引理 1 设 E 为 Banach 空间，$\{G_n, v_n\}$ 为广义双正交系，ω 为 E 到 $E/[\bigcup_{i=1}^{\infty} v_i^*(E^*)]^{\perp}$ 的典则映射，则 $\{\omega(G_i)\}$ 在 $E/[\bigcup_{i=1}^{\infty} v_i^*(E^*)]_{\perp}$ 为完备的充要条件是 $[\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i] + [\bigcup_{i=1}^{\infty} v_i^*(E^*)]_{\perp}$ 在 E 中稠密。

证明 $\rightarrow$ 如果 $\{\omega(G_i)\}$ 在 $E/[\bigcup_{i=1}^{\infty} v_i^*(E^*)]_{\perp}$ 中完备，则 $[\bigcup_{i=1}^{\infty} \omega(G_i)] = E/[\bigcup_{i=1}^{\infty} v_i^*(E^*)]_{\perp}$，$\forall x$

$\in E, \omega(x) \in [\bigcup_{n=1}^{\infty}\omega(G_n)], \forall \varepsilon > 0, \exists\ x_1, x_2, \cdots, x_m, x_k \in G_{n_k}\ k = 1,2,\cdots,m$，使得

$$\| \omega(x) - \omega(\sum_{k=1}^{m} x_k) \| < \varepsilon/2$$

从而 $\| \omega(x - \sum_{k=1}^{m} x_k) \| < \varepsilon/2$，由 $\| \omega(x) \|$ 的定义，取 $y \in [\bigcup_{n=1}^{\infty} v_n^*(E^*)]_-$，使得 $\| x - \sum_{k=1}^{m} x_k + y \| \leqslant \| \omega(x - \sum_{k=1}^{m} x_k) \| + \varepsilon/2 < \varepsilon$，这表明$[\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n] + [\bigcup_{n=1}^{\infty} v_n^*(E^*)]_-$ 在 E 中稠密。

← 　因 $E = \overline{[\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n] + [\bigcup_{n=1}^{\infty} v_n^*(E^*)]_\perp}$，令 $\omega: x \to x + [\bigcup_{n=1}^{\infty} v_n^*(E^*)]_\perp$，则 $E/[\bigcup_{n=1}^{\infty} v_n^*(E^*)] = [\bigcup_{n=1}^{\infty}\omega(G_n)]$.

证毕

定理 6 　E 为 Banach 空间，$\{G_n, v_n\}$ 为一个广义双正交系，$\{G_n\} \subset E, v_n \in L(E,E)\ n = 1, 2, 3, \cdots$，$\{G_n\}$ 为 Schauder 分解序列，且相应的坐标射影算子为 $\varphi_n = v_n|_{[\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n]}\ n = 1,2,3,\cdots$，如下等价

(1) $\{v_n^*(E^*)\}$ 为 w＊-Schauder 分解序列，且有$\{v_n^*(E^*)\} \approx \{v_n^*([\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n]^*)\}$

(2) $\forall x \in E, \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ 收敛，

(3) $E = [\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n] \oplus [\bigcup_{n=1}^{\infty} v_n^*(E^*)]_-$，

(4) $E^* = [\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n]^\perp \oplus [\bigcup_{n=1}^{\infty} v_n^*(E^*)]$，

(5) $E^{**} = [\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n]^{\perp\perp} \oplus [\bigcup_{n=1}^{\infty} v_n^*(E^*)]^\perp = \pi([\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n]) \oplus [\bigcup_{n=1}^{\infty} v_n^*(E^*)]^\perp$，

(6) $\{\omega(G_n)\}$ 为 $E/[\bigcup_{n=1}^{\infty} v_n^*(E^*)]_\perp$ 上的一个 Schauder 分解，且$\{\omega(G_n)\} \approx \{G_n\}$，$\omega$ 为 E 到 $E/[\bigcup_{n=1}^{\infty} v_n^*(E^*)]_\perp$ 的典则映射。

以下$(a)(b)$ 可以推出(1) ～ (6)，

(a) $\forall \varphi \in E^{**}, \sum_{n=1}^{\infty} v_n^{**}(\varphi)$ 收敛，

(b) $E^{**} = \pi([\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n]) \oplus [\bigcup_{n=1}^{\infty} v_n^*(E^*)]^\perp$

证明　$\because \{G_n\}$ 为 Schander 分解序列，$\therefore [\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n] \cap [\bigcup_{n=1}^{\infty} v_n^*(E^*)]_- = \{0\}$，若有(1)，则由[2] 易证$\{\omega(G_n)\}$ 为 $E/[\bigcup_{n=1}^{\infty} v_n^*(E^*)]_\perp$ 的一个 Schauder 分解，由引理 1，$E = \overline{[\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n] + [\bigcup_{n=1}^{\infty} v_n^*(E^*)]_\perp}$，又由 [1] 定理 5(1) → (15)，$[\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n] + [\bigcup_{n=1}^{\infty} v_n^*(E^*)]_\perp$ 在 E 中闭，故 $E = [\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n] \oplus [\bigcup_{n=1}^{\infty} v_n^*(E^*)]_-$，这是(3)

(2)⇔(3)，(1)⇔(2) 是[1] 定理 4 的直接推论，(3) → (4) → (5)，显然，(5) → (4) → (3) 由[1] 引理 1 立得。

现有(3)，$E=[\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n]\oplus[\bigcup_{n=1}^{\infty}v_n^*(E^*)]_\perp$，则

$E/[\bigcup_{n=1}^{\infty}v_n^*(E^*)]\overset{*}{\approx}[\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n]$，因此$\{\omega(G_n)\}$为$E/[\bigcup_{n=1}^{\infty}v_n^*(E^*)]_\perp$的一个 Schauder 分解，同样由 [2]，$\{v_n^*(E^*)\}$ 为 w*-Schauder 分解序列，由 (3)⇔(2) 及 (2)，$\forall x\in E$，有 $\sup_{1\leqslant n<+\infty}\|\sum_{i=1}^{n}v_i(x)\|<+\infty$，由[1]定理 5 必有$\{v_n^*(E^*)\}\approx\{v_n^*([\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n]^*)\}$，这正好为(1)。

同样，若有(3)，重复前面的讨论，有(3) → (6)；若有(6)，则 $\omega|_{[\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n]}$ 为$[\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n]$到$E/[\bigcup_{n=1}^{\infty}v_n^*(E^*)]_\perp$的一个同构，从而$(\omega|_{[\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n]})^{-1}\omega$正好是由$E$到$[\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n]$的一个射影，伴随有$[\bigcup_{n=1}^{\infty}v_n^*(E^*)]_\perp$，从而(3)成立。

由(a)，$\forall\varphi\in E^{**}$，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n^{**}(\varphi)$收敛，将$E$嵌入到$E^{**}$，则有(2)成立。 证毕

定理 7 设$\{G_n,\varphi_n\}$为一个 Schauder 分解序列，$\varphi_n\in L([\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n],[\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n])$ $n=1,2,3,\cdots$，存在具有下列性质的$v_n\in L(E,E)$的充要条件是$[\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n]$在$E$中是补的，$v_n$满足：

(1) v_n为φ_n在E上的延拓，

(2) $\{v_n^*(E^*)\}$为 w*-Schander 分解序列，

(3) $\{v_n^*(E^*)\}\approx\{\varphi_n^*([\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n]^*)\}$

证明 若有满足(1)，(2)，(3)的v_n存在，则由定理 6(3)知$[\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n]$在$E$中是补的。

现设$[\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n]$在$E$中补，则有$F$，使得$E=F\oplus[\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n]$，因$\varphi_n\in L([\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n],[\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n])$，$n=1,2,3,\cdots$，令$\varphi_n(x)=v_n(x+y)$，$x\in[\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n]$，$y\in F$，则$\{G_n,v_n\}$为一广义双正交系，且$F=\{Z|v_n(Z)=0,n=1,2,3,\cdots\}$，从而$[\bigcup_{n=1}^{\infty}v_n^*(E^*)]_\perp=F$，故有$E=[\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n]\oplus[\bigcup_{n=1}^{\infty}v_n^*(E^*)]_\perp$，由定理 6 结论成立。 证毕

定理 7 是本文的一个最重要的结果，由它可得如下推论，它表明不满足[1]定理 5 和定理 7 的 Schander 分解序列是存在的。

定理 8 设E为 Barach 空间，$\{G_n,\varphi_n\}$为一 Schander 分解序列，$\varphi_n\in L([\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n],[\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n])$ $n=1,2,3,\cdots$，$[\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n]$在$E$中不补，则不存在$v_n\in L(E,E)$，满足$v_n|_{[\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n]}=\varphi_n$ $n=1,2,3,\cdots$，$\{v_n^*(E^*)\}\approx\{\varphi_n^*([\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n])^*\}$，$\{v_n^*(E^*)\}$为 w*-Schauder 分解序列。

参 考 文 献

1 傅强，吴以炘. 关于 Barach 空间中 Scharder 分解序列的特征指标 $r_G(V)$—(Ⅰ). 重庆大学学报，1992，15(1)：80～83

2 Ivan，Singer. Bases in Barach Space Ⅱ. Berlin Springer-Verlag，1980：380～450