(6) 33-39

软组织线性双相理论的混合有限元解法*

Mixed Finite Element Formulation of the Linear Biphasic Theory for Soft Tissues

严 波 张培源
Yan Bo Zhang Peiyuan
(重庆大学工程力学系，重庆，630044)

A

摘 要 针对人体肌骨软组织小变形的线性双相模型，采用 Galerkin 加权残值法导出了求解相应线性问题的混合有限元公式，给出了相应系统方程的迭代求解格式。对软组织约束受压问题的有限元分析，得到与其理论解一致的结果。

关键词 软组织；线性双相理论；加权残值法；有限元法

中国图书资料分类法分类号 R318.01；O242.21

ABSTRACT The behavior of soft tissues of human musculoskeletal system can be described with the biphasic model based on a continuum theory of mixtures. This paper, using Galerkin weighted residual method, obtains a mixed finite element formulation for the linear biphasic model of small deformation, and, in turn, gives out the iterative scheme solving the system equations. The results of numerical analysis for the constrained compression problem are consistent with those obtained by theory, which illustrates the correctness and feasibility of the derived mixed finite element formulation. Concludingly, this formulation provides an effective means of numerical analysis for the motion mechanism of human articulating joints.

KEYWORDS soft tissue; linear biphasic theory; weighted residual method; finite element method

0 前 言

软组织在人体肌骨系统许多关节中的受力特性方面起着十分重要的作用。例如，人体的膝、肩及股关节表面的软骨，对这些关节各部分之间的近乎无摩擦的现象起着关键的作用。又如人体脊椎间盘也是一软组织结构，它位于相对较硬的脊椎之间，使其脊柱具有很大的柔性和承载能力。为了理解这些关节的运动，必须建立准确的模型，以描述这些关节的运动。有了这些模型，就可以研究关节异常反应的一些重要问题，进而为病状的处理提供可行的方案。

一个能全面描述关节行为的模型，无疑极其复杂。Mow 等人[1] 在混合物理论的基础上

* 收文日期 1994-06-01

建立了双相模型，又称 KLM 双相模型。该模型将如象关节软骨和椎间盘这样的软组织视为一两相不可混合且不可压缩的双相介质：一个代表骨胶原和蛋白聚糖的弹性固相和另一个代表其间流体的非粘性流体相。与实验结果比较，KLM 双相模型能准确描述关节软骨的变形和应力场[2,3]。基于此模型，文[4]提出了一种罚有限元公式，其将压力 p 视为一独立变量，在控制方程中将其消去，从而在导出的有限元公式中不含变量 p。本文则保留压力 p，由 Galerkin 加权残值法导出了一种基于变量 u-p 的混合有限元公式，给出了相应方程的迭代求解格式，对约束受压问题进行了有限元分析，得到与文[1]一致的结果。

1 线性双相理论控制方程

基于线性双相理论假设，软组织的两相介质具有不可混合性和不可压缩性，且两相均在小变形范围内。该理论视流体为无粘性介质，而粘性效应则由扩散动量交换方程计入，这种效应与流体相和固体相间的相对速度成正比。即流体的粘性与流体和固体间的粘性作用相比可以忽略。这里进一步假设，忽略惯性作用，固体及流体含量不随时间变化，固相为各向同性线弹性介质。

对于一给定的区域 $\mathscr{V}$，设其边界为 Γ。线性双相理论的控制方程为[1]：

连续方程 $$(\varphi^f v_i^f + \varphi^s v_i^s)_{,i} = 0 \tag{1}$$

动量方程

固体为 $$\sigma_{ji,j}^s + \Pi_i^s = 0 \tag{2}$$

流体为 $$\sigma_{ji,j}^f + \Pi_i^f = 0 \tag{3}$$

本构方程

固体为 $$\sigma_{ij}^s = -\varphi^s p\delta_{ij} + \lambda^s e_{kk}^s\delta_{ij} + 2\mu^s e_{ij}^s \tag{4}$$

流体为 $$\sigma_{ij}^f = -\varphi^f p\delta_{ij} \tag{5}$$

扩散动量交换方程

$$\Pi_i^s = -\Pi_i^f = K(v_i^f - v_i^s) \tag{6}$$

式中上标 S 代表固体相，f 代表流体相，$\varphi^f = V^f/V$ 为空穴率，$\varphi^s = V^s/V$ 为固体含量。φ^f 和 φ^s 间有关系：

$$\varphi^f + \varphi^s = 1 \tag{7}$$

v_i 为速度张量，σ_{ij} 为应力张量，Π_i 为两相间的扩散交换，p 为压力，λ^s、μ^s 为固相的弹性 Lame 常数，e_{ij}^s 为应变张量，e_{kk}^s 为体积膨胀量，K 为扩散阻尼系数，在缓慢运动情况下，其与渗透率 k 有如下关系[5]

$$K = (\varphi^f)^2/k \tag{8}$$

边界条件为：

$$u_i^s = \bar{u}_i^s \qquad 在\ \Gamma_{u^s}\ 上 \tag{9a}$$

$$v_i^f = \bar{v}_i^f \qquad 在\ \Gamma_{v^f}\ 上 \tag{9b}$$

$$t_i^s = \bar{t}_i^s \qquad 在\ \Gamma_{t^s}\ 上 \tag{9c}$$

$$t_i^f = \varphi^f p n_i = \varphi^f \bar{p} n_i \quad 在\ \Gamma_{t^f}\ 上 \tag{9d}$$

这里 u_i^s 为固相位移分量，t_i^s、t_i^f 分别为作用在固体和流体相上的力，n_i 为 Γ 的外法线方向，$\bar{u}_i$、$\bar{v}_i$、$\bar{t}_i$、$\bar{p}$ 分别为位移、速度、外力和压力的边值，Γ_{u^s}、Γ_{v^f}、Γ_{t^s}、Γ_{t^f} 则为其相应的边界。

方程(1) ～ (9) 即构成求解人体软组织小变形线性问题的场方程及边界条件。

2　混合有限元公式的推导

采用 Galerkin 加权残值法推导有限元公式。选择(9a) 和(9b) 为强制满足的边界条件，(9c) 和(9d) 为自然边界条件。设 w_i^s，$\bar{w}_i^s$，w_i^f，$\bar{w}_i^f$ 分别为固体和流体动量方程及自然边界条件的权函数，w^p 为连续方程(1) 的权函数，其为一标量函数。则相应的加权残值表达式为：

$$\int_V w_i^s[\sigma_{ji,j}^s + K(v_i^f - v_i^s)]\mathrm{d}V + \int_{\Gamma_{t^s}} \bar{w}_i^s(t_i^s - \bar{t}_i^s)\mathrm{d}\Gamma$$

$$+\int_V w_i^f[\sigma_{ji,j}^f + K(v_i^s - v_i^f)]\mathrm{d}V + \int_{\Gamma_{t^f}} \bar{w}_i^f\varphi^f(p - \bar{p})n_i\mathrm{d}\Gamma + \int_V w^p(\varphi^f v_i^f + \varphi^s v_i^s)_{,i}\mathrm{d}V = 0 \quad (10)$$

利用 Guass 定理有：

$$\int_V w_i^s\sigma_{ji,j}^s\mathrm{d}V = -\int_V w_{i,j}^s\sigma_{ji}^s\mathrm{d}V + \oint_\Gamma w_i^s\sigma_{ji}^s n_j\mathrm{d}\Gamma$$

$$= -\int_V w_{i,j}^s\sigma_{ji}^s\mathrm{d}V + \oint_\Gamma w_i^s t_i^s\mathrm{d}\Gamma \quad (11)$$

$$\int_V w_i^f\sigma_{ji,j}^f\mathrm{d}V = -\int_V w_{i,j}^f\sigma_{ji}^f\mathrm{d}V + \oint_\Gamma w_i^f\varphi^f p n_i\mathrm{d}\Gamma \quad (12)$$

将(11) 及(12) 代入式(10) 中可得：

$$-\int_V w_{i,j}^s\sigma_{ji}^s\mathrm{d}V + \oint_\Gamma w_i^s t_i^s\mathrm{d}\Gamma + \int_V w_i^s K(v_i^f - v_i^s)\mathrm{d}V$$

$$+\int_{\Gamma t^s} \bar{w}_i^s(t_i^s - \bar{t}_i^s)\mathrm{d}\Gamma$$

$$-\int_V w_{i,j}^f\sigma_{ji}^f\mathrm{d}V + \oint_\Gamma w_i^f\varphi_i^f p_{n_i}\mathrm{d}\Gamma + \int_V w_i^f K(v_i^s - v_i^f)\mathrm{d}V$$

$$+\int_{\Gamma t^f} \bar{w}_i^f\varphi^f(p - \bar{p})n_i\mathrm{d}\Gamma$$

$$+\int_V w^p(\varphi^f v_i^f + \varphi^s v_i^s)_{,i}\mathrm{d}V = 0 \quad (13)$$

由于位移和速度边界条件为强制满足的边界条件，故可使权函数 $w_i^s = 0$(在 Γ_{v^s} 上)，$w_i^f = 0$(在 Γ_{v^f} 上)，且取 $\bar{w}_i^s = -w_i^s$，$\bar{w}_i^f = -w_i^f$. 将此条件及式(4) 和(5) 代入(13) 可得：

$$\int_V w_{i,j}^s[-\varphi^s p\delta_{ij} + \lambda^s e_{kk}^s\delta_{ij} + 2\mu^s e_{ij}^s]\mathrm{d}V$$

$$-\int_V w_i^s K(v_i^f - v^s)\mathrm{d}V - \int_{\Gamma t^s} w_i^s\bar{t}_i^s\mathrm{d}\Gamma + \int_V w_{i,j}^f(-\varphi^f p\delta_{ij})\mathrm{d}V$$

$$-\int_V w_i^f K(v_i^s - v_i^f)\mathrm{d}V - \int_{\Gamma t^f} w_i^f\varphi^f\bar{p}n_i\mathrm{d}\Gamma - \int_V w^p(\varphi_i^f + \varphi^s v_i^s)_{,i}\mathrm{d}V \quad (14)$$

此方程为(10) 的弱形式，是有限元分析的基本方程。对区域 V 进行离散化，则每一单元均满足方程(14)。现对单元的固体及流体的位移、速度及压力插值：

$$\boldsymbol{u}^s = \boldsymbol{N}\boldsymbol{u}_e^s \qquad \boldsymbol{v}^s = \boldsymbol{N}\boldsymbol{v}_e^s \qquad \boldsymbol{v}^f = \boldsymbol{N}\boldsymbol{v}_e^f \qquad \boldsymbol{p} = \boldsymbol{N}_p\boldsymbol{p}_e \quad (15)$$

上述插值函数 c_0 连续，足以使方程(14) 中的所有积分有限。式中 n 代表单元 n 中结点上的相应物理量。采用 Galerkin 法，取：

$$w^s = N w_n^s \qquad w^f = N w_n^f \qquad w^e = N_e w_n^e \tag{16}$$

N_e 为插值函数列向量，其在单元间可以不连续。W_n^s、W_n^f、W_n^e 则为单元 n 的任意系数。

单元应变分量及膨胀量可表达为

$$\varepsilon_n^s = B u_n^s \tag{17}$$

$$e_n^s = L\varepsilon_n^s = LBu_n^s \tag{18}$$

对于三维问题，$L=[1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$。应注意 ε_n^s 为工程应变列向量。将式(16) 及(17) 代入(14) 中，并用矩阵表达，可得：

$$\begin{aligned}
&\int_{V_n} (\nabla(N w_n^s)):(-\varphi^s N_e p_n I + \lambda^s e^s I + 2\mu^s \varepsilon^s)\mathrm{d}V \\
&-\int_{V_n} (N w_n^s)^T K (N v_n^f - N v_n^s)\mathrm{d}V - \int_{\Gamma_{n^s}} (N w_n^s)^T - t^s \mathrm{d}\Gamma \\
&+\int_{V_n} (\nabla(N w_n^f)):(-\varphi^f N_e p_n I)\mathrm{d}V - \int_{V_n} (N w_n^f)^T K (N v_n^s - N v_n^f)\mathrm{d}V \\
&-\int_{\Gamma^f} (N w_n^f)^T \varphi^f \bar{p} n \mathrm{d}\Gamma - \int_{V_n} (N_e w_n^e)^T [\nabla \cdot (\varphi^f N V_n^f + \varphi^s N V_n^s)\mathrm{d}V
\end{aligned} \tag{19}$$

注意，这里的 ε^s 为 3 × 3 阶应变矩阵。利用式(17) 和(18)，可以证明

$$(\nabla(N w_n^s)):(-\varphi^s N_e p_n I) = -\varphi^s (w_n^s)^T (LB)^T N_e p_n \tag{20a}$$

$$(\nabla(N w_n^s)):(\lambda^s e^s I) = (w_n^s)^T (\lambda^s B^T L^T L B u_n^s) \tag{20b}$$

$$(\nabla(N w_n^s)):(2\mu^s \varepsilon^s) = 2\mu^s (w_n^s)^T B^T B u_n^s \tag{20c}$$

$$\nabla \cdot N = LB \tag{20d}$$

将(20) 式代入(19) 中可得：

$$\begin{aligned}
&(w_n^s)^T(-\varphi^s C p_n + H u_n^s - A v_n^f + A u_n^s - f_n^s) \\
&+ (w_n^f)^T(-\varphi^f c p_n - A v_n^s + A v_n^f - f_n^f) \\
&- (w_n^e)^T(\varphi^f E v_n^f + \varphi^s E v_n^s) = 0
\end{aligned} \tag{21}$$

这里

$$\begin{aligned}
A_n &= \int_{V_n} K N^T N \mathrm{d}V \\
C_n &= \int_{V_n} (LB)^T N_e \mathrm{d}V \\
E_n &\ \ \int_{V_n} (LB)^T N_e \mathrm{d}V \\
H_n &= \int_{V_n} (\lambda^s B^T L^T L B + \mu^s B^T D B)\mathrm{d}V \\
f_n^s &= \int_{\Gamma_n^s} N^T \bar{t} \mathrm{d}\Gamma \\
f_n^f &= \int_{\Gamma_n^f} N^T \varphi^f \bar{p} n \mathrm{d}\Gamma
\end{aligned} \tag{22}$$

式中：

$$D=\begin{bmatrix}2&0&0&0&0&0\\0&2&0&0&0&0\\0&0&2&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

由于权函数的任意性，得方程组：

$$\begin{bmatrix}A_e&-A_e&0\\-A_e&A_e&0\\-\varphi^sE_e&-\varphi^fE_e&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{v}_e^s\\\dot{v}_e^f\\\dot{p}_e\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}H_e&0&-\varphi^sC_e\\0&0&-\varphi^fC_e\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_e^s\\u_e^f\\p_e\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_e^s\\f_e^f\\0\end{bmatrix}\tag{23}$$

对区域 $\mathscr{V}$ 中所有单元求和，得系统方程

$$M\dot{X}+QX=F\tag{24}$$

此处：

$$M=\begin{bmatrix}A&-A&0\\-A&A&0\\-\varphi^sE&-\varphi^fE&0\end{bmatrix}\qquad Q=\begin{bmatrix}H&0&-\varphi^sC\\0&0&-\varphi^fC\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}v^s\\v^f\\\dot{p}\end{bmatrix}\qquad X=\begin{bmatrix}u^s\\u^f\\p\end{bmatrix}\qquad F=\begin{bmatrix}f^s\\f^f\\0\end{bmatrix}\tag{25}$$

这里 A、E、H、C、v^s、v^f、p、f^s、f^f 为相应单元矩阵或向量的组集。对于线性问题，M 和 Q 与时间无关。

至此，导出了软组织线性双相理论的混合有限元公式(24)。

3　系统方程的求解

为求解线性微分方程(24)，可将其分解为

$$\begin{cases}\bar{A}v+\bar{H}u+\bar{C}p=F\\\bar{E}v=0\end{cases}\tag{26}$$

这里

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}A&-A\\-A&A\end{bmatrix}\qquad \bar{H}=\begin{bmatrix}H&0\\0&0\end{bmatrix}\qquad \bar{C}=\begin{bmatrix}-\varphi^sC\\-\varphi^fC\end{bmatrix}$$

$$\bar{E}=\begin{bmatrix}-\varphi^sE^T\\-\varphi^fE^T\end{bmatrix}\qquad \bar{F}=\begin{bmatrix}f^s\\f^f\end{bmatrix}\qquad v=\begin{bmatrix}v^s\\v^f\end{bmatrix}\qquad u=\begin{bmatrix}u^s\\u^f\end{bmatrix}\tag{27}$$

令 $t_{n+1} = t_n + \Delta t$，则在任一时刻 t_{n+1}(28) 成立，即有：

$$\begin{cases}\overline{A}v_{n+1}\overline{H}u_{n+1} + \overline{C}p_{n+1} = \overline{F}_{n+1} \\ \overline{E}^T v_{n+1} = 0\end{cases} \tag{28}$$

采用梯形法[6]，有

$$u_{n+1} = \Delta t[(1-\omega)v_n + \omega v_{n+1}] + u_n \qquad 0 \leqslant \omega \leqslant 1 \tag{29}$$

将(29)代入(28)，整理后可得：

$$\begin{bmatrix} E^T & 0 \\ \overline{A} + \Delta t\omega\overline{H} & \overline{C} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{n+1} \\ p_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \overline{F}_{n+1} - \overline{H}[\Delta t(1-\omega)v_n + u_n] \end{bmatrix} \tag{30}$$

结合边界初值条件，式(29)和(30)即构成了方程(24)的迭代求解格式。式(29)中 ω 的不同取值，即构成隐式和显式求解方法。

4　软组织约束受压问题

文[1]对软组织约束受压问题进行了实验及理论分析，现用本文导出的混合有限元法计算分析该问题，以证明本方法的可行性和有效性。

软组织约束受压问题，是将一柱状软组织试样置于一刚性约束腔内，该腔限制了试样侧面的径向运动及底部的轴向运动。通过置于试样顶部的刚性多孔板施加外部作用。参见图 1.

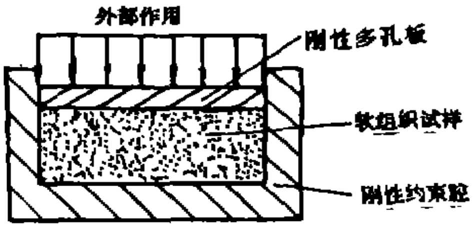
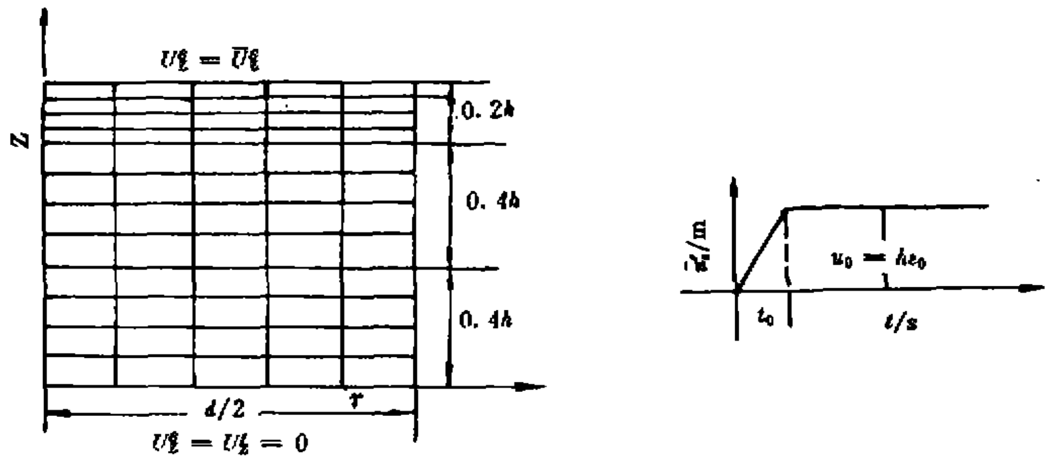


图 1　软组织约束受压问题

该约束受压问题为一轴对称问题，其有限元计算模型如图 2 所示。计算中采用 4 节点四边形单元。几何参数为：$d = 6.35$ mm，$h = 1.78$ mm，$\varphi^s = 0.17$，物理参数为：$k = 0.76 \times 10^{-14}$ m^4/Ns，$\lambda_s = 0.1$ MPa，$\mu_s = 0.3$ MPa，外部作用(见图 2b)$\varepsilon_0 = 0.05$，$t_0 = 500$ s.



a) 有限元网格划分及边界条件　　b) 外部作用

图 2　软组织约束受压轴对称问题有限元计算模型

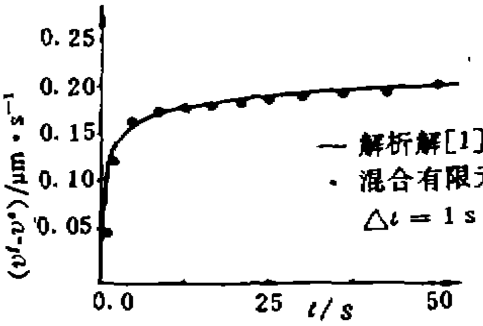


图 3　离表面 0.04 h 深处相对速度与时间的关系

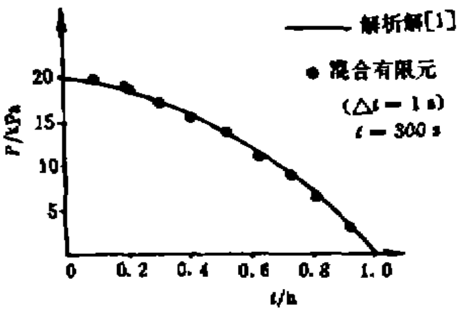


图 4　$t = 300$ s 时压力在轴向的变化

计算结果如图 3 及图 4 所示、利用本文导出的混合有限元法的计算结果与理论解[1]一致，证明了本文提出的方法的可行性和有效性。

5　结　论

本文针对人体肌骨软组织小变形线性双相模型，采用 Galerkin 加权残值法、导出了求解该类问题的混合有限元公式、给出了方程的迭代求解格式。对软组织约束受压问题的计算分析得到与理论解[1]一致的结果，证明了本方法的可行性和有效性，为人体关节运动机理的进一步分析提供了基础，进而为病状处理方案提供依据。

参 考 文 献

1　Mow V. C. ,Kuei S. C. ,Armstrong C. G. Biphasic creep and stress relaxation of articular cartilage in compression; Theory and experiments. J. Biomech. 1980,102:73-84

2　Armstrong C. G. ,Lai W. M. ,Mow V. C. ,An analysis of the unconfined compression of articulae cartilage. J. Biomech. Eng. ,1984,106:165-173

3　Mow V. C. ,Holmes M. H. ,Lai W. H. Fluid transport and mechanical properties of articular cartilage;A Review. J. Biomech. 1984,17:377-394

4　Spilker R. L. ,Sun J. K. Formulation and Evaluation of A finite element model of soft hydrated tissues. Computers and Structures. 1990,34(4):425-439

5　Lai W. M. ,Mow A. C. ,Drag-induced compression of articular cartilage during a permeation experiment. Biorheology. 1980,17:111-123

6　Hughes T. J. R. The finite element method;Linear static and dynamic finite element analysis. Prentice-Hall,Englewood Cliffs. N. J. ,1987