1995 年 1 月　　重庆大学学报　(自然科学版)　　Vol. 18, №. 1
第 18 卷第 1 期　　Journal of Chongqing University (Natural Science Edition)　　Jan. 1995

(8) 45-50

用相关同调概念统一表述电磁位和规范变换的尝试*

The Application of Relevant Homology in the Unified Representation of Electromagnetic Potentials and Gauge Transformation

云正清　　谭邦定
Yun Zhengqing　　Tan Bangding
(重庆大学电气工程系,重庆,630044)

TM153
O154

A

摘　要　对由非闭外微分式表示的电磁量,运用相关同调的概念引入其电磁位和规范变换,使闭微分式、非闭微分式的电磁位以及规范变换均可以统一地由相关同调的概念给出。

关键词　同调 / 电磁位; 规范变换
中国图书资料分类法分类号　O154; TM153

ABSTRACT　Electromagnetic potentials and gauge transformation are derived for non-closed exterior differential forms with the help of relevant homology. Since de Rham co-homology is surely a relavant homology, potentials for both closed and non-closed forms and the gauge transformation can be unified in terms of relavent homology.

KEYWORDS　homology / electromagnetic potential; gauge transformation

0　引　言

在电磁场理论及计算中,常常引入位的概念,例如动态位 φ-A[1]; 涡流场中的标量磁位 Ω 和向量电位 T[2] 等等。位的引入均是利用了向量分析中的两个恒等式,即对标量函数 φ 和向量函数 V,恒有

$$\nabla \times (\nabla\varphi) \equiv 0$$
$$\nabla \cdot (\nabla \times V) \equiv 0 \tag{1}$$

用外微分式表示,(1) 中的两个等式可以包含在 Poincare 引理中,即对任意外微分式 w,有

$$\mathrm{d}w \equiv 0 \tag{2}$$

式中,d 为外微分算子。如果一外微分形式 w 为闭的,即

$$\mathrm{d}w \equiv 0 \tag{3}$$

* 收文日期　1993-04-19

则依 Poincare 引理之逆，局部地存在外微分式 α，使

$$w = \mathrm{d}\alpha \tag{4}$$

式中的 α 可以理解为位函数。

但是，如果 w 不是闭的，即式(3) 不成立，便不能由 Poincare 引理之逆引入位。

在电磁场理论中，还讨论规荡变换。例如，对动态位 φ 和 A，存在标量函数 Ψ，令

$$\begin{cases} \varphi' = \varphi - \dfrac{\partial}{\partial t}\Psi \\ A = A + \nabla\Psi \end{cases} \tag{5}$$

则仍能得到相同的 E 和 B. 式(5) 的得来仍然是利用恒等式(1)。但从外微分式的角度看，由于 φ 和 A 不是闭的，我们无法直接由 Poincare 引理的逆引入规范变换式(5)。

本文考察非闭外微分式相关同调的概念，并由相关同调出发一般性地建立位函数和规范变换。当外微分式作为电磁量时，可以得到动态位 φ-A，标量磁位和向量电位 Ω-T 以及规范变换式(5).

2 同调论的有关内容

2.1 外微分式

这里仅给出一些定义和结论，详细内容可参阅文献[3 ～ 5].

p 次外微分式 w^p 对 n 维流形中的局部坐标域，选取坐标基

$$\{x^i, i = 1,2,\cdots,n\}$$

则 p 次外微分式可以定义为

$$w^p = \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n} w_{i_1,i_2\cdots i_p}\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \mathrm{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p} \tag{6}$$

式中，$w_{i_1i_2\cdots i_p}$ 为坐标基的实函数；p 为整数且 $0 \leqslant p \leqslant n$；“$\wedge$”表示外积。

外微分算子 d 对 n 维流形中的 p- 形式 w^p，定义外微分算子 d 为

$$\mathrm{d}w^p = \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n} (\mathrm{d}w) \wedge \mathrm{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p} \tag{7}$$

式中

$$\mathrm{d}w = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1 + \frac{\partial}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x^n}\mathrm{d}x^n\right) w_{i_1i_2\cdots i_p} \tag{8}$$

注意，式中要对 n 个而不是 p 个基坐标求 $w_{i_1i_2\cdots i_p}$ 的偏导数。很显然，$\mathrm{d}w^p$ 是 $p+1$ 次外微分式。

闭微分式 如果外微分式 w^p 满足

$$\mathrm{d}w^p = 0 \tag{9}$$

则 w^p 叫做闭的。

恰微分式 对 p- 形式 w^p，如果存在 $p-1$ 次外微分式 α^{p-1}，使

$$w^p = \mathrm{d}\alpha^{p-1} \tag{10}$$

则 w^p 叫做恰的。

Poincare 引理 对任意外微分式 w^p，恒有

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}w^p) \equiv 0 \tag{11}$$

可以证明，当 $p = 0,1$ 时，式(11) 等价于式(1). 由 Poincare 引理知道，恰微分式必是闭的。

Poincare 引理的逆 对闭微分式 w^p，局部地存在 α^{p-1}，使 $w^p = \mathrm{d}\alpha^{p-1}$，即闭微分式是局部

恰的。

注意，Poincare 引理的逆仅局部成立，对整体区域一般不成立。

2.2　De Rham 上同调和相关同调[4]

外微分式的 De Rham 上同调：对两个闭的 p 次外微分式 ω^p 和 α^p，如果它们仅相差一个恰微分式 $\mathrm{d}\lambda^{p-1}$，即

$$w^p - \alpha^p = \mathrm{d}\lambda^{p-1} \tag{12}$$

则称 w^p 与 α^p 是 De Rham 上同调的。

外微分式的相关同调：对两个 p 次外微分式（不一定是闭的）w^p 和 α^p，如果式(12) 仍然成立，则称 w^p 和 α^p 是相关同调的。

相关同调是 de Rham 上同调概念的推广。显然，de Rham 上同调一定是相关同调的，反之不然。或者，相关同调的外微分式所具有的性质对 de Rham 上同调的外微分式同样成立。

进一步，当 w^p 为恰微分式时，式(12) 中的 α^p 为 0，即恰微分式 de Rham 上同调（相关同调）于 0，表示成

$$w^p - 0 = \mathrm{d}\lambda^{p-1} \qquad \text{或} \qquad w^p = \mathrm{d}\lambda^{p-1} \tag{13}$$

对式(12) 两端求外微分并利用 Poincare 引理，可以得到

$$\mathrm{d}w^p = \mathrm{d}\alpha^p \tag{14}$$

即两个相关同调的外微分式的外微分相等。

2.3　Maxwell 方程组

在四维时空中选取局部坐标基

$$\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$$

其中，x^0 对应于时间，$x^i (i = 1,2,3)$ 对应于空间。

引入电场和磁场强度 1- 形式：

$$E = E_1\mathrm{d}x^1 + E_2\mathrm{d}x^2 + E_3\mathrm{d}x^3$$
$$H = H_1\mathrm{d}x^1 + H_2\mathrm{d}x^2 + H_3\mathrm{d}x^3$$

磁感应强度、电位移和电流密度 2-形式

$$B = B_{12}\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 + B_{23}\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + B_{31}\mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^1$$
$$D = D_{12}\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 + D_{23}\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + B_{31}\mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^1$$
$$J = J_{12}\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 + J_{23}\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + J_{31}\mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^1$$

以及电荷密度 3-形式

$$\rho_{123}\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3$$

构造 2-形式

$$F = -\mathrm{d}x^0 \wedge E + B$$
$$G = \mathrm{d}x^0 \wedge H + D$$

和 3-形式

$$\Gamma = -\mathrm{d}x^0 \wedge J + \rho$$

则 Maxwell 方程组可以表示成

$$\mathrm{d}F = 0 \tag{15}$$
$$\mathrm{d}G = \Gamma \tag{16}$$
$$\mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{17}$$

由 Poincare 引理可知，式(17)是由式(16)两端求外微分得到的、或者说，式(16)蕴函式(17)。因此，可以将式(15)、(16) 作为描述电磁场的基本方程。

3 de Rham 上同调与动态位 A-φ

本节将利用外微分式 de Rham 上同调的概念得到动态位。

由式(15) 可知，2- 形式 F 是闭的，依照 Poincare 引理的逆知道，F 是局部恰当的，从而 F 同调于 0，即存在 1- 形式 λ^1 使

$$F = \mathrm{d}\lambda^1 \tag{18}$$

设 $$\lambda^1 = -\lambda_0 \mathrm{d}x^0 + \lambda_1 \mathrm{d}x^1 + \lambda_2 \mathrm{d}x^2 + \lambda_3 \mathrm{d}x^3$$

则依式(7)，取 $n = 4, p = 1$，得

$$\mathrm{d}\lambda^1 = -\mathrm{d}x^0 \wedge \left[\left(-\frac{\partial\lambda_0}{\partial x^1} - \frac{\partial\lambda_1}{\partial x^0}\right)\mathrm{d}x^1 + \left(-\frac{\partial\lambda_0}{\partial x^2} - \frac{\partial\lambda_2}{\partial x^0}\right)\mathrm{d}x^2 + \left(-\frac{\partial\lambda_0}{\partial x^3} - \frac{\partial\lambda_3}{\partial x^0}\right)\mathrm{d}x^3\right]$$
$$+ \left(\frac{\partial\lambda_2}{\partial x^1} - \frac{\partial\lambda_1}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 + \left(\frac{\partial\lambda_3}{\partial x^2} - \frac{\partial\lambda_2}{\partial x^3}\right)\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + \left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial x^3} - \frac{\partial\lambda_3}{\partial x^1}\right)\mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^1$$

代入式(18) 并依 F 的定义可得

$$\begin{cases} E_i = -\dfrac{\partial\lambda_0}{\partial x^i} - \dfrac{\partial\lambda_i}{\partial x^0} & i = 1,2,3 \\ B_{ij} = \dfrac{\partial\lambda_j}{\partial x^i} - \dfrac{\partial\lambda_i}{\partial x^j} & ij = 12,23,31 \end{cases} \tag{19}$$

引入向量 $A = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$

和标量 $\varphi = \lambda_0$

则式(19) 可以表示成(注意 $x^0 = t$)

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

此即动态位满足的关系式。因此，λ^1 即为四维时空中用外微分式表示的电磁场动态位。可见，从闭外微分式的 de Rham 上同调可以导出动态位。

4 相关同调与规范变换

分析 λ^1 的同调性质。由于 λ^1 一般不闭(除非 $F = 0$)，所以只能研究其相关同调性质。设 λ^1 与 λ'^1 相关同调，即存在 0- 形式 ψ，使

$$\lambda^1 - \lambda'^1 = \mathrm{d}\psi$$

设 λ'^1 表示为

$$\lambda'^1 = -\lambda'_0 \mathrm{d}x^0 + \lambda'_1 \mathrm{d}x^1 + \lambda'_2 \mathrm{d}x^2 + \lambda'_3 \mathrm{d}x^3$$

而

$$\mathrm{d}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x^0}\mathrm{d}x^0 + \frac{\partial\psi}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1 + \frac{\partial\psi}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + \frac{\partial\psi}{\partial x^3}\mathrm{d}x^3$$

将上述三式整理得

$$\lambda^1 = (-\lambda'_0 + \frac{\partial\phi}{\partial x^0})dx^0 + (\lambda'_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x^1})dx^1 + (\lambda'_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x^2})dx^2 + (\lambda'_3 + \frac{\partial\phi}{\partial x^3})dx^3$$

依 λ^1 的定义，有

$$\begin{cases} \lambda_0 = \lambda'_0 - \dfrac{\partial\phi}{\partial x^0} \\ \lambda_i = \lambda'_i + \dfrac{\partial\phi}{\partial x^i} \qquad i = 1,2,3 \end{cases} \tag{20}$$

引入向量　$A = (\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3)$

和标量　$\varphi' = \lambda'_0$

则式(20)可以表示成

$$\begin{cases} \varphi = \varphi' - \dfrac{\partial\phi}{\partial x^0} = \varphi' - \dfrac{\partial\phi}{\partial t} \\ A = A' + \nabla\phi \end{cases} \tag{21}$$

式(21)即是规范变换。可见，由外微分式相关同调的概念，可以得到电磁场的规范变换。

5　相关同调与向量电位 T 和标量磁位 Ω

在三维涡流场中，常用 T-Ω 法求解电磁场问题[2]。这里，我们用相关同调概念建立四维时空中的电磁位 τ-α，当加入涡流场满足的条件时，可得到向量电位 T 和标量磁位 Ω.

考察 2-形式 G 的同调性质。由式(16)可知，G 一般不闭，除非 $\Gamma = 0$. 因此，我们考虑 G 的相关同调性质。

设 G 相关同调于 τ，即存在 1-形式 α，使

$$G - \tau = d\alpha$$

式中，2-形式 τ 可表示为

$$\tau = \lambda_{01}dx^0 \wedge dx^1 + \lambda_{02}dx^0 \wedge dx^2 + \lambda_{03}dx^0 \wedge dx^3 + \lambda_{12}dx^1 \wedge dx^2 + \lambda_{23}dx^2 \wedge dx^3 + \lambda_{31}dx^3 \wedge dx^1$$

1-形式 α 表示为

$$\alpha = -\alpha_0 dx^0 + \alpha_1 dx^1 + \alpha_2 dx^2 + \alpha_3 dx^3$$

将 τ、α 代入 G 且利用 G 的定义可得

$$\begin{cases} H_i = \dfrac{\partial\alpha_0}{\partial x^i} - \dfrac{\partial\alpha_i}{\partial x^0} + \lambda_{0i} \qquad i = 1,2,3 \\ D_{ij} = \dfrac{\partial\alpha_j}{\partial x^i} - \dfrac{\partial\alpha_i}{\partial x^j} + \lambda_{ij} \qquad ij = 12,23,31 \end{cases} \tag{22}$$

式中，H_i 为 H 的三个分量；D_{ij} 为 D 的三个分量。

引入向量

$$\tau_t = (\lambda_{01}, \lambda_{02}, \lambda_{03})$$
$$\tau_s = (\lambda_{12}, \lambda_{23}, \lambda_{31})$$
$$\Omega_s = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

和标量

$$\Omega_t = -\alpha_0$$

则式(22)可以表示为

$$\begin{cases} H = \tau_t - \nabla \Omega_t - \dfrac{\partial \Omega_s}{\partial t} \\ D = \tau_s + \nabla \times \Omega_s \end{cases} \tag{23}$$

为了得到涡流场中的向量电位 T 和标量磁位 Ω，我们证明由

$$\frac{\partial \Omega_s}{\partial t} = \frac{\partial \tau_s}{\partial t} = 0 \tag{24}$$

可以导出涡流场条件[7]，即

$$\frac{\partial D_s}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

事实上，对式(23) 的第 2 式两边求时间的偏导数并由式(24) 即可以得到

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial \tau_s}{\partial t} + \nabla \times \frac{\partial \Omega_s}{\partial t} = 0$$

再取原式的散度并经整理可得

$$\nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot \tau_s = \rho$$

两边对时间求偏导数即得

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

将式(24) 代入式(23) 的第 1 式，且令 $T = \tau_t, \Omega = \Omega_t$ 得

$$H = T - \nabla \Omega$$

此即涡流场中 T-Ω 应满足的条件。

显然，我们可以将 τ 和 α 看作是 T-Ω 的一种推广。

这里我们从外微分式的相关同调得到了一种广义的位 τ-α，在涡流场中，它对应 T-Ω.

6　结束语

在相关同调的概念下，电磁位与规范变换被统一起来。

值得注意的是，利用相关同调可以方便地把位的概念推广，但推广后的位一般不再具有物理意义。对数值分析而言，引入位主要是为了减少未知量，因此，一般而言，引入的位至少应有一个是标量位，才有可能使未知量减少，这说明了 A-φ 法、T-Ω 得到应用的原因，而对应于式(23) 的第 2 式中的位 τ_s-Ω_s，由于 τ_s 和 Ω_s 都是向量，共有 6 个分量，不能减少未知量，故未得到应用。

参 考 文 献

1　谢处方，饶克谨．电磁场与电磁波．北京：高等教育出版社，1987．241～243

2　盛剑霓．工程电磁场数值分析．西安：西安交通大学出版社，1991．199～204

3　陈省身，陈维桓．微分几何讲义．北京：北京大学出版社，1983．65～92

4　威斯顿霍尔兹，C．V．著；武际可译．数学物理中的微分形式．北京：北京大学出版社，1990．151～208

5　云正清，俞集辉，谭邦定．Maxwell 方程组与电磁量的微分形式．重庆大学学报，1994，17(1)：29～34

6　王继春．数学物理中的同调论．北京：科学出版社，1991．93～109，113～118

7　Brown，M．L．Calculation of 3D eddy currents at power frequences．IEE PROC，1982，Pt．A(1)：46～53