

# 逆向结构动力修改方法探索及其工程应用

## The Exploration of Reverse Dynamic Modifying Method of Structure and It's Application in Engineering

9-15

TB 123

张湘伟  
Zhang XiangWei

徐新奇  
Xu XinQi

何正友  
He ZhengYou

(重庆大学工程力学系, 630044, 重庆)

**摘要** 提出了在给定结构动特性约束目标下, 修改结构参数的一种新的逆向结构动力修改方法, 并且通过在结构固有频率及谐振激励下结构动应力响应幅值约束目标下的算例, 证明了该方法对修改量限制较小, 从而释放了使用其它结构动力修改方法时, 修改量较小这一约束条件。本方法, 应用于车架的动态控制中, 获得了令人满意的结果。

**关键词** 动力修改; 变更量; 灵敏度; 逆向摄动法  
中国图书资料分类法分类号 0347.2

结构动力学, 振动

**ABSTRACT** In this paper, A new reverse dynamic modifying method of structure is introduced to modify variables, in conditions of dynamic binding goals which are given. As the structure frequency and the dynamic rephoses were binding goals, we computed the structure, it is clear that in this method, the conditions of modified binding variables must small is released. we have attained a satisfied result in applying in dynamic controls of frame of auto mobiles.

**KEYWORDS** Dynamic modifying; Modifyiny Variables; Sensitivity; Veverse Perturbatim methad

## 0 前言

结构动力修改的目的, 是使结构在给定的工作环境下满足预期的对其动态特性的要求。结构动力修改一般可以分为正向修改和逆向修改两类。所谓正向修改是指对已有结构做了局部修改后, 在结构模型参数已知的情况下, 用某种方法获得修改后结构的动特性参数, 即进行结构重分析。逆向修改则是指以预期的结构动特性作为目标来确定需要修改的结构参数的变更量。众所周知, 逆向结构动力修改方法迄今已提出摄动法、灵敏度分析方法等[1]。这些方法的优点是物理概念明确, 但变更量的幅度受到制约, 修改量较大时, 精度明显降低。

\* 收文日期 1994-07-18  
国家教委优秀年轻教师基金资助项目

从对结构动特性的要求来看,目前的研究大多限于结构固有频率和振型。但是,结构的动力特性,理应包括动态响应、动应力、频响函数等,在实际的动力机械及工程结构中,其动应力往往更为重要。基于上述观点,笔者提出了一种新的逆向结构动力修改方法,该方法以结构修改参数的变更量的平方和最小作为目标值,而将所要求的结构动特性作为约束,并借助于逐次逆摄动法,以解决变更量较大的动力修改。另外还使用所提出的方法,对在预期的固有频率和随机动应力响应均方根值的约束目标下汽车车架的动态控制问题进行探索,取得了好的结果。

## 1 逆向结构动力修改

### 1.1 计算原理

设结构动特性与结构可修改参数之间存在着下述线性关系:

$$[S]_{r \times n} \{ \Delta t \}_{n \times 1} = \{ \Delta g \}_{r \times 1} \quad (1)$$

量,  $\{ \Delta t \} = [\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n]^T$  表示可修改的物理参数的变更量,  $[S] = \left[ \frac{\partial g_i}{\partial t_j} \right]$  表示灵敏度矩阵。

在结构动力修改问题中,可修改参数的数目往往大于给定的动特性参数约束数,对(1)式即存  $n > r$ 。故针对给定的一组动特性参数目标值,利用(1)式可求得结构参数增量的最小范数解为:

$$\{ \Delta t \} = [S]^T ([S][S]^T)^{-1} \{ \Delta g \} \quad (2)$$

上述方法可能产生两种误差:一是由(2)式求得的最小范数解为一近似解;二是因动特性与可修改参数之间往往存在着非线性关系,特别是当动特性参数的变更量较大时,使用(1)式所表示的线性关系式求解,会产生较大误差。为了克服上述不足,提出了在以结构可修改参数变更量的平方和为最小的条件下求其最优解,即定义(3)式所表示的目标函数,得到结构动力修改的数学模型:

$$\begin{aligned} \min F(\Delta t) &= \sum_{j=1}^n (\Delta t_j^2) \\ \text{s. t. } [s] \{ \Delta t \} &= \{ \Delta g \} \\ t_j &\geq t_{\min} \end{aligned} \quad (3)$$

上式可以用线性规划求解,本文则采用如下求解方法。

在状态约束条件式(1)中,因  $n > r$ ,故可将含  $\Delta t_{r+1}, \Delta t_{r+2}, \dots, \Delta t_n$  的项移到方程的右边作为已知量看待,解这一方程得:

$$\begin{cases} \Delta t_1 = g_1(\Delta t_{r+1}, \Delta t_{r+2}, \dots, \Delta t_n) \\ \Delta t_2 = g_2(\Delta t_{r+1}, \Delta t_{r+2}, \dots, \Delta t_n) \\ \dots \dots \dots \\ \Delta t_r = g_r(\Delta t_{r+1}, \Delta t_{r+2}, \dots, \Delta t_n) \end{cases} \quad (4)$$

将(4)式代入(3)式,得到

$$F(\Delta t) = \sum_{j=r+1}^n (\Delta t_j^2)$$

对上式求偏导,即有:

$$\frac{\partial F}{\partial \Delta t_{r+1}} = \frac{\partial F}{\partial \Delta t_{r+2}} = \dots = \frac{\partial F}{\partial \Delta t_n} = 0 \quad (5)$$

联立求解(4)式和(5)式即可得到结构可修改参数变更量最小意义下的  $\Delta t_j$ ; ( $j = 1 \sim r$ ) 值, 修改后的参数值:

$$t_j = t_{j-1} + \Delta t_j \quad (6)$$

为了克服上述的第二种误差, 当采用逐次摄动技术, 即将动特性参数一个较大的改变量  $\{\Delta g\}$  分成  $m$  个微小量之和, 即:

$\{\Delta g\} = \{\Delta g\}^1 + \{\Delta g\}^2 + \dots + \{\Delta g\}^1 + \dots + \{\Delta g\}^m$  时, 对于每个  $\{\Delta g\}^k$  利用上述方法求解, 当  $\{\Delta g\}^k$  由  $\{\Delta g\}^1$  逐次变化到  $\{\Delta g\}^m$  时, 得到动特性及其灵敏度的逐次摄动公式:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^k \frac{\partial g_i^{k-1}}{\partial \alpha_j^{k-1}} \cdot \Delta t_j^k = \Delta g_j^k \\ g_i^k = g_i^{k-1} + \Delta g_i^k \\ t_j^k = t_j^{k-1} + \Delta t_j^k \end{cases} \quad (7)$$

式中的灵敏度表达式  $\frac{\partial g_i^{k-1}}{\partial \alpha_j^{k-1}}$ 、摄动量  $\{\Delta g\}^k$  的大小及摄动步数均视具体问题而定, 本文取:  $\{\Delta g\}^1 = \{\Delta g\}^2 = \dots = \{\Delta g\}^m = \{\Delta g\}/m$ , 即等步长摄动。

## 1.2 动特性的灵敏度分析式

### 1.2.1 固有频率及振型对修改参数的灵敏度

考虑固有频率及振型对修改参数的灵敏度, 设  $m$  自由度的离散化结构受任意激(8)式所示:

$$[M]\{\ddot{X}(t)\} + [C]\{\dot{X}(t)\} + [K]\{X(t)\} = \{F(t)\} \quad (8)$$

其中  $[M]$ 、 $[C]$ 、 $[K]$  分别是结构的质量矩阵、阻尼矩阵、刚度矩阵,  $\{X(t)\}$  表示节点位移, 上标“ $\cdot$ ”表示对时间求导数。

令系统的固有频率为  $f$ , 相应的正则主振型为  $\{\varphi\}$ , 则有:

$$\{\varphi\}^T [M] \{\varphi\}_i = 1 \quad (9)$$

$$\{\varphi\}^T [K] \{\varphi\}_i = \lambda = f^2 \quad (10)$$

将(9)式两边对第  $j$  个修改参数  $\alpha_j$  求导, 得:

$$\frac{\partial \{\varphi\}_i^T}{\partial \alpha_j} [M] \{\varphi\}_i + \{\varphi\}_i^T \frac{\partial M}{\partial \alpha_j} \{\varphi\}_i + \{\varphi\}_i^T [M] \frac{\partial \{\varphi\}_i}{\partial \alpha_j} = 0 \quad (11)$$

根据向量原理, 可令  $\frac{\partial \{\varphi\}_i}{\partial \alpha_j} = \{\varphi\}_i S_j$  (12)

联立求解(11)、(12)式可得正则振型对修改参数的灵敏度算式为:

$$\frac{\partial \{\varphi\}_i}{\partial \alpha_j} = -\frac{1}{2} \{\varphi\}_i \{\varphi\}_i^T \frac{\partial [M]}{\partial \alpha_j} \{\varphi\}_i \quad (13)$$

将(10)式两边对  $\alpha_j$  求导, 并将(13)式代入得:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha_j} = \{\varphi\}_i^T \frac{\partial [K]}{\partial \alpha_j} \{\varphi\}_i - \lambda \{\varphi\}_i^T \frac{\partial [M]}{\partial \alpha_j} \{\varphi\}_i \quad (14)$$

于是得到固有频率对修改参数的灵敏度为:

$$\frac{\partial f_i}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial f_i}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha_j} = \frac{1}{2f_i} \{\varphi\}_i^T \left( \frac{\partial [K]}{\partial \alpha_j} - f_i^2 \frac{\partial [M]}{\partial \alpha_j} \right) \{\varphi\}_i \quad (15)$$

利用(13)、(15)式可求得各阶固有频率及振型对变更量的灵敏度。

### 1.2.2 动力响应幅值对修改参数的灵敏度

首先推导谐振激励下动应力幅值对修改参数的灵敏度公式, 由有限元方法知, 应力与位移响应的关系式表示为:

$$\{\sigma\} = [s]\{a\} \quad (16)$$

其中 $\{\sigma\}$ 是节点应力矢量, $\{a\}$ 是节点位移矢量, $[s]$ 为应力矩阵。

则 $\{\sigma\}$ 对 $t_j$ 的灵敏度为:

$$\frac{\partial\{\sigma\}}{\partial t_j} = [s] \frac{\partial\{a\}}{\partial t_j} + \frac{\partial[s]}{\partial t_j} \{a\} \quad (17)$$

因应力矩阵 $[s]$ 是 $t_j$ 的显函数,故 $\frac{\partial[s]}{\partial t_j}$ 易于求得,所以只要求出了在动载荷作用下结构的位移响应幅值及其灵敏度,则动应力幅值的灵敏度随之可以求出。

设(8)式中的作用力 $\{F(t)\}$ 为谐振激励,即 $\{F(t)\} = \{F\}e^{i\omega t}$ ,从而系统的响应可以写作

$$\{X\} = \sum_{i=1}^n \frac{\{\varphi\}^T \{F\} \{\varphi\} e^{i\omega t}}{\lambda_i - p^2 + j c_i^*} \quad (18)$$

其中 $n$ 表示动力响应的参振振型数, $c_i^*$ 表示 $c_i$ 的共轭复数,当不考虑系统阻尼,且以 $\{F(t)\}$ 的虚部为实际激励时,得到系统的稳态响应幅值为:

$$\{a\} = \sum_{i=1}^n \frac{\{\varphi\}^T \{F\} \{\varphi\}}{\lambda_i - p^2} \quad (19)$$

令 $\{u\}_i = \{\varphi\}^T \{F\} \{\varphi\}_i$ ,  $v_i = \lambda_i - p^2$ ,则 $\{a\}$ 对修改参数 $t_j$ 的灵敏度为:

$$\frac{\partial\{a\}}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial\{u\}_i}{\partial t_j} v_i - \{u\}_i \frac{\partial v_i}{\partial t_j} \right) / v_i^2 \quad (20)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial\{u\}_i}{\partial t_j} &= \frac{\partial\{\varphi\}^T}{\partial t_j} \{F\} \{\varphi\}_i + \{\varphi\}^T \{F\} \frac{\partial\{\varphi\}_i}{\partial t_j} \\ \frac{\partial v_i}{\partial t_j} &= \frac{\partial \lambda_i}{\partial t_j} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

将(20)式代入(17)式即得到动应力幅值对修改参数的灵敏度。

其次,推导随机激励下动应力均方根值对修改参数的灵敏度,由(8)式,当 $\{F(t)\}$ 为随机载荷时,利用模态变换得到结构各自由度位移响应的均方值为

$$E[X_i^2(t)] = \{\varphi\} \int_0^\infty [H(f)] [\varphi]^T [S_{rr}(f)] [\varphi] [H^*(f)] df \{\varphi\}^T$$

式中: $[H(f)]$ 表示结构系统的频响函数阵,是一对角阵, $[H^*(f)]$ 表示 $[H(f)]$ 的共轭复数, $[S_{rr}(f)]$ 表示输入载荷的功率谱密度,第 $i$ 个位移响应的均方根为

$$X_{r,ms} = \sqrt{E[X_i^2(t)]} \quad (23)$$

将(16)式两边对修改参数 $t_j$ 求导,并考虑到(15)式可得位移响应的均方根值对修改参数的灵敏度。

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_{r,ms}}{\partial t_j} &= \frac{\partial X_{r,ms}}{\partial E[X_i^2(t)]} \cdot \frac{\partial E[X_i^2(t)]}{\partial t_j} \\ &= \frac{1}{2 \sqrt{E[X_i^2(t)]}} \cdot \{\varphi\} \int_0^\infty [H(f)] [\varphi]^T [S_{rr}(f)] \left( [\varphi] \frac{\partial [H^*(f)]}{\partial t_j} + \frac{\partial [\varphi]}{\partial t_j} [H^*(f)] \right) \\ &\quad + ([H(f)] \frac{\partial [\varphi]^T}{\partial t_j} + \frac{\partial [H(f)]}{\partial t_j} [\varphi]^T) [S_{rr}(f)] [\varphi] [H^*(f)] df \{\varphi\}^T \\ &\quad + \{\varphi\} \int_0^\infty [H(f)] [\varphi]^T [S_{rr}(f)] [\varphi] [H^*(f)] df \frac{\partial \{\varphi\}^T}{\partial t_j} \\ &\quad + \frac{\partial \{\varphi\}_i}{\partial t_j} \int_0^\infty [H(f)] [\varphi]^T [S_{rr}(f)] [\varphi] [H^*(f)] df \{\varphi\}^T \end{aligned} \quad (24)$$

## 2 算 例

为验证上述方法的可行性和可靠性,就以下算例实施本文所提出的方法。

考虑图 1 所示两边固定,两边简支的矩形薄板,长  $l = 30 \text{ cm}$ ,宽  $b = 20 \text{ cm}$ ,厚  $h = 0.4 \text{ cm}$ ,弹性模量  $E = 210 \text{ GPa}$ ,泊松比  $\nu = 0.3$ ,密度  $\rho = 7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,将板分作 6 个单元,12 个节点,在节点 4 处作用有沿  $Z$  轴方向的正弦激励, $p(t) = p_0 \sin ft = 26 \sin(62.8t)$ ,取各单元板厚  $h_i$  为变更量,且  $h_{\text{max}} = 0.2 \text{ cm}$ 。

首先对板进行动力分析,求得板前二阶固有频率及各单元应力幅值如下表所示。

表 1 矩形板初始固有频率及应力 MPa

$f_1/\text{Hz}$	$f_2/\text{Hz}$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_4$	$\sigma_5$	$\sigma_6$
113.531	279.050	43.29	99.36	130.12	39.42	41.42	82.00

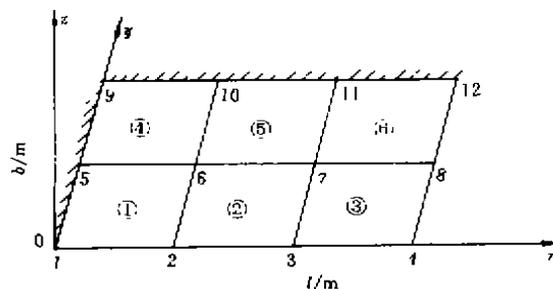


图 1 板计算图

下面给出对频率及单元应力的不同要求,用上述方法计算的结果。

第一种情况:要求第 1,2 阶固有频率提高 10%, $\sigma_3$  下降 20%,即  $\Delta f_1 = 11.35 \text{ Hz}$ ,  $\Delta f_2 = 27.9 \text{ Hz}$ ,  $\Delta \sigma_3 = -26.02 \text{ MPa}$  计算结果如表 2、表 3

表 2 给定的目标值计算结果

	目标值	计算值	误差(%)	分析次数	摄动步
$f_1/\text{Hz}$	124.881	124.894	0.01		
$f_2/\text{Hz}$	306.950	306.927	0.0075	1	5
$\sigma_3/\text{MPa}$	104.09	104.11	0.008		

表 3 板厚变化

	$h_1$	$h_2$	$h_3$	$h_4$	$h_5$	$h_6$
初始值	0.40					
变更后值	0.4409	0.4057	0.4614	0.4032	0.4127	0.4670

第 2 种情况:则考虑变更量较大的情况,希望第 1,2 阶频率各提高 50%, $\sigma_3$  下降 30%,即

$\Delta f_1 = 56.760\text{Hz}$ ,  $\Delta f_2 = 139.525\text{Hz}$ ,  $\Delta \sigma_3 = -39\text{MPa}$ , 计算结果如表 1. 表 5

表 4 给定目标值计算结果

	目标值	计算值	误差(%)	分析次数	摄动步
$f_1/\text{Hz}$	170.291	170.305	0.0082		
$f_2/\text{Hz}$	418.575	418.573	0.0005	2	5
$\sigma_3/\text{MPa}$	91.09	91.12	0.0360		

表 5 板厚变化

	cm					
	$h_1$	$h_2$	$h_3$	$h_4$	$h_5$	$h_6$
初始值	0.10					
变更后值	0.6391	0.5643	0.6108	0.4369	0.4559	0.6505

算例表明,该逆向结构动力修改方法用于较大变更量的动力修改中,收敛速度快,计算简单可靠,并且同样适用于其它复杂的动特性修改问题。

### 3 车架动态控制问题的应用

本文选用 ISUZU NKR 轻型车车架为研究对象,对车架纵梁采用板单元离散,横梁则采用梁单元离散<sup>[2]</sup>,路面为砂石搓板路面,通过计算车架的前 12 阶固有频率,其中第一阶扭转频率为:  $f_1 = 11.09\text{Hz}$ , 第一阶弯曲频率为  $f_2 = 20.395\text{Hz}$ . 各单元动应力响应的均方根值计算结果如图 2 所示。

由于弹性体车架的一阶扭转和一阶弯曲频率对汽车的行驶平顺性影响较大<sup>[3]</sup>,在许可的范围内,提高车架的固有频率,可使平顺性得到改善<sup>[4]</sup>. 本文以车架的一阶扭转和一阶弯曲频率各提高 10% 作为频率的控制目标,对于车架的动应力则要求在结构尺寸变更后各单元应力响应的均方根值小于初始时单元应力的最大值. 车架可修改的结构参数设为板单元的板厚,共取八个修改参数. 考虑到在整车设计完成后对车架进行改进设计时,车架的结构参数已受到严格限制,故这里从修改参数的变更量的平方和为最小值为目标值. 利用前述修改方法,计算结果如表 6, 表 7.

表 6 固有频率计算结果

	Hz				
	目标值	计算值	误差(%)	分析次数	摄动步数
$f_m$	13.0976	13.1169	0.147	1	5
$f_w$	22.5285	22.5600	0.119		

表 7 修改参数的变化

修改参数	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$
初始值	0.45							
变更后值	0.447	0.510	0.543	0.505	0.458	0.439	0.594	0.434

修改后单元应力的均方根值沿车架分布曲线如图 2 所示。

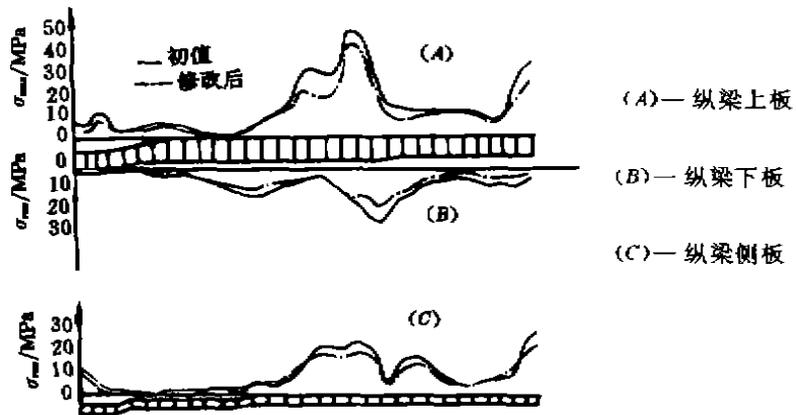


图 2 车架应力分布曲线

## 4 结 论

当可修改的结构参数数目  $n$  大于要求修改的动特性参数  $r$  时,其状态约束方程是次定方程,可有无穷多解。本文是在  $\min F(A) = \sum_{j=1}^r (A_j^2)$  的意义下求其最优解,从而克服了直接求其最小范数解所带来的误差。本文采用逐次逆摄动方法,解决了变更量较大时的结构动力修改问题。算例以及对车架进行动态控制的计算结果表明,该方法收敛速度快,计算简单可靠,并且同样适用于复杂结构的其它动特性修改问题。

## 参 考 文 献

- 1 阵德成. 动力修正技术在工程应用中面临的几个问题,全国第四届振动理论及应用学术会议论文集, 1990
- 2 李承德. 整车系统多自由度模型及随机振动响应分析,汽车工程. 1987,2;10~15
- 3 张湘伟. 随机激励下车体响应谱的概率有限元分析,重庆大学学报,1988,11(11);105~108
- 4 Toshisu Fujiwara, optimization Analysis for Vechicle Vibration Mode Control. Proc,6th,Int. Conf. on Vechicle Structural Mechanics. April,1986,22~24