

④

20-26

水力压裂裂缝形态与缝内压力分布^{*}

Fracture Geometry and Pressure Distribution in Fracture for Hydrofracturing

阳友奎 肖长富 邱贤德 吴刚
Yang Youkui Xiao Changfu Qiu Xiande Wu Gang
(重庆大学资源及环境工程学院, 重庆, 630044)

TD31
0346.1

A 摘要 首先根据岩石断裂力学理论证明了水力压裂裂缝具有与缝内压力分布无关的椭圆形自相似扩展特征,在此基础上,结合断裂力学与流体力学给出了水力压裂裂缝内压力分布的近似解析解。

关键词 水力压裂; 裂缝扩展; 裂缝形态; 缝内压力分布

中国图书资料分类法分类号 TD31, O346.1

ABSTRACT It is proved first that hydrofracture has a self-similar elliptic extending characteristic which is independent of the pressure distribution in fractures by the theory of fracture mechanics in this paper. Based on this theory, the approximative analytic solutions of pressure distribution in fractures have been put forward by fracture mechanics coupled with fluid mechanics.

KEYWORDS hydrofracture; fracture extending; fracture geometry; pressure distribution in fracture

0 引 言

水力压裂的实质在于通过地层钻孔向被压目的层注入高压流体而诱发孔周人工裂缝。它作为一种能可靠而经济地在地下产生大面积人工裂缝的地层改造技术,及其仅通过钻孔注液即能将地表与深部地层联系起来的这一技术优势,现已成功地用以激化油气开采和瓦斯抽放中岩层的渗透性和过流通道、地热开发中的热交换面、可溶性盐类矿床水溶开采中的井间快速压裂连通、地层压裂注浆加固、压裂注水软化和工业废弃物的压裂注入式地下永久处置以及深部地应力测量等。

水力压裂过程起始于高压流体诱发的孔壁破裂^[1],但压裂的最终效果更主要地取决于此后裂缝的扩展过程。这一过程的物理背景是极其复杂的,它是关于岩石力学和流体力学的一个复杂耦合问题,特别是通常不能对地层的压裂响应性态进行直接的试验观察更增大了

* 收文日期 1994-09-12

国家自然科学基金资助项目

重庆大学博士毕业,现工作于铁道部科学研究院西南分院

该问题研究的难度。尽管如此,其工程应用的广泛性及其所带来的巨大经济效益,自本世纪末首先用作油气井酸化开采技术以来,已吸引了国内外大量学者对其进行专门研究。笔者将应用断裂力学和流体力学理论对裂缝扩展过程中裂缝的形态和缝内压力分布特征给出理论解答。

1 水力压裂裂缝形态

由于压裂过程中压裂液的不间断注入和裂缝的不断向前扩展,裂缝形态计算中有一个通常事先很难确知的缝内压力分布函数,即裂缝形态的计算是一个流体力学和断裂力学的耦合问题,问题的瞬态解答中有断裂判据 $K_I = K_{Ic}$ 这一已知的可用条件,它事实上能使该耦合问题得以解耦。然而,过去求解水力压裂裂缝扩展过程的所有文献^[2~5],都没能充分地利用这一可用条件,使问题的求解最终都只能以数值方法来实现,且各种模型的数值求解中都出于数学上的需要而采用了一些不合理或不确定的假设条件,所得出的解答并无明确的工程意义,且所采用的数值方法也给工程应用带来了实际困难。

作为水力压裂裂缝形态计算的基础,作者已由断裂力学理论和卡氏定理导出了平面应变水力压裂裂缝的宽度方程*

$$w(x) = \frac{4}{\pi E} \int_x^a \left[\int_{-\xi}^{\xi} \Delta p(x) \sqrt{\frac{\xi+x}{\xi-x}} dx \right] \frac{1}{\sqrt{\xi^2-x^2}} d\xi \quad (1)$$

式中 $\Delta p(x) = p(x) - \sigma_h$ 为缝内净压力, $p(x)$ 为缝内流体压力, σ_h 为垂直于裂缝面的地应力, E 为岩石弹性模量, a 为裂缝半长, ξ 为积分过程中瞬时裂缝半长,参见图1所示。

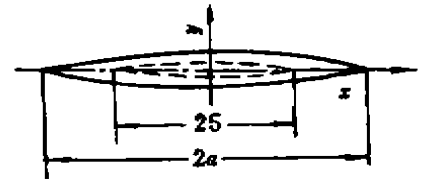


图1 裂缝放大图

对于水力压裂,当缝内净压力沿裂缝全长光滑连续分布即可用一连续函数 $\Delta p(x) = p_w f(x)$ 来表示时,裂尖处的应力强度因子 K_I 为^[6,7]

$$K_I = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^a [p_w f(x) - \sigma_h] \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx \quad (2)$$

式中 p_w 为孔底压力, $f(x)$ 为压力分布特征函数。

根据积分中值定理,(2)式可表示为

$$K_I = A p_w \sqrt{a} - \sigma_h \sqrt{\pi a} \quad (3)$$

式中 $A = \frac{2}{\pi} f(b) \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$ ($-a < b < a$) 为一常数,由断裂判据 $K_I = K_{Ic}$ 知 $A = \frac{\sigma_h \sqrt{\pi a} + K_{Ic}}{p_w \sqrt{a}}$,则将式(3)代入(1)式并积分有

$$w(x) = \frac{4}{E} K_{Ic} \sqrt{\frac{a^2-x^2}{\pi a}} \quad (4)$$

* 阳友奎,岩盐水力压裂机理及其工程应用的研究,重庆大学博士论文,1993,5

式中 K_{1c} 为目的层岩石的断裂韧度。该式表明, 不管缝内净压力分布如何, 裂缝的横断面形态均为由裂缝长度和岩石材料特性常数 E 和 K_{1c} 确定的细长椭圆, 而与其中存在的压力分布形式无关。裂缝形态方程的唯一性说明水力压裂裂缝具有形态相似扩展特征。

上述结果具有极其重要的理论和工程实际意义:

1) 裂缝扩展过程中任意时刻的形态方程是恒定不变的, 即裂缝长度和宽度存在恒定的对应关系式(4), 孔底处的裂缝宽度可计算为

$$w(o) = \frac{4}{E} K_{1c} \sqrt{\frac{a}{\pi}}$$

2) 对于一定的压裂目的层, 当采用不同压裂液和注液流量时, 缝内压力分布和井孔处需用压力可能是不同的, 但裂缝形态的变化过程是完全一样的。

3) 对于非渗透性岩层中的压裂, 由于裂缝体积与注入流体体积相等, 当裂缝高度为某一已知值 h (通常为目的层厚度或封隔段高度) 时有

$$Q = V(a) = 2h \int_0^a w(x) dx = 2K_{1c} h a \sqrt{\pi a} / E$$

则可由实际注入压裂液体积迅速估算裂缝尺寸

$$a = \left(\frac{QE}{2\sqrt{\pi} h K_{1c}} \right)^{2/3}$$

$$w(0) = \frac{4K_{1c}}{E\sqrt{\pi}} \left(\frac{QE}{2\sqrt{\pi} h K_{1c}} \right)^{1/3}$$

特殊地, 当注液流量为常量 q 时有

$$Q = qt$$

$$a = \left(\frac{qEt}{2\sqrt{\pi} h K_{1c}} \right)^{2/3}$$

$$w(0) = \frac{4K_{1c}}{E\sqrt{\pi}} \left(\frac{qEt}{2\sqrt{\pi} h K_{1c}} \right)^{1/3}$$

$$w(x) = \frac{4K_{1c}}{E\sqrt{\pi}} \left(\frac{2\sqrt{\pi} h K_{1c}}{qEt} \right)^{1/3} \sqrt{\left(\frac{qEt}{2\sqrt{\pi} h K_{1c}} \right)^{4/3} - x^2} \quad (5)$$

此时亦可得裂缝的扩展速度为

$$v = \frac{\partial a}{\partial t} = \frac{qE}{3h\sqrt{\pi a} K_{1c}}$$

即在常流量注液条件下, 裂缝的扩展速度逐渐减小。

4) 对于渗透性目的层, 除缝内压力分布 $p(x)$ 可能与非渗透情形的具体形式不同外, 其裂缝的自相似扩展特征依然成立, 只是此时的裂缝形态不存在象非渗透情形时那样与 q 或 Q 间的关系, 而应是扣除渗漏损失后的有效注液流量或注液体积。

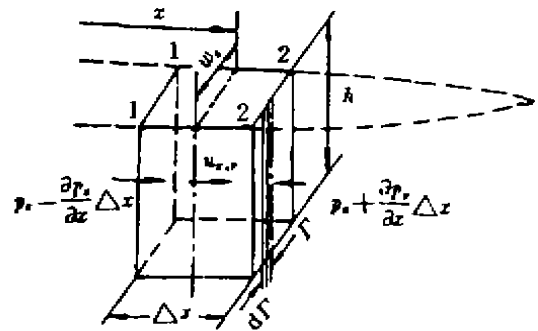


图2 缝内流动分析控制体示意图

2 缝内压力分布

笔者所考虑的水力压裂裂缝如图2所示,其纵断面为一矩形,这与GdK解答^[2]所用的物理模型是完全一样的,为简化问题起见,视压裂液流动为沿裂缝长度即 x 方向的一维层流流动,即忽略裂缝内横向和铅直方向上的流动以及裂缝入口和尖端处的复杂流动,这对水力裂缝这样的细长裂缝是能较好地成立的,此外,视流体为不可压缩流体,需事先说明的是,在下面的公式推导中,有时以 f_x 形式来表示与时间和空间变量有关的物理量 $f(x,t)$ 。

根据流量等效原则,沿裂缝长度方向上某一铅直断面上的平均流速为

$$v_x = \frac{qx}{w_x h} \quad (6)$$

再根据层流特性即宽度中心线上的最大流速 u_0 为全断面上流量等效平均流速的二倍有(参见图1)

$$u(x, r, t) |_{r=0} = 2v_x = u_0$$

$$u(x, r, t) |_{r=\pm w_x/2} = 0$$

式中 $u(x, r, t)$ 为某点处的实际流速, r 为离裂缝纵轴面的距离。再由沿裂缝宽度流速分布为抛物线分布这一层流特征有

$$u_{x,r} = u_0 \left[1 - \frac{r^2}{(w_x/2)^2} \right] = \frac{8q_x}{w_x^2 h} \left(\frac{w_x^2}{4} - r^2 \right)$$

则粘性流体阻力系数沿裂缝宽度的变化规律为

$$\tau_{x,r} = \tau_{r,r} = \mu \left| \frac{\partial u_{x,r}}{\partial r} \right| = \frac{16\mu q_x r}{w_x^2 h}$$

进而得到裂缝壁面处的阻力系数为

$$\tau_{r,r} |_{r=\pm w_x/2} = \frac{8\mu q_x}{w_x^2 h}$$

取 x 坐标处沿裂缝长度方向上长度为 Δx 的缝内1-1与2-2断面间的流体为控制体(图1),该控制体的动量方程为^[8]

$$\sum F_x = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\omega} \rho u_{x,r} dv + \int_{\omega} \rho u_{x,r}^2 dA \quad (7)$$

式中 $\sum F_x$ 为所取控制体受外力的合力在 x 方向(即流体流动方向或裂缝扩展方向)上的分量,右端第一项表示对控制体的体积分;第二项为对控制体外边界过流面的面积分,由于不考虑渗漏,因此只在1-1和2-2断面上积分,也就是该项表示两过流面上的动量差。则参照图1,对所取控制体有

$$\begin{aligned} \sum F_x &= - \left(h p_2 \frac{\partial w_x}{\partial x} + h w_x \frac{\partial p_2}{\partial x} + \frac{16\mu q_x}{w_x^2} \right) \Delta x \\ \int_{\omega} \rho u_{x,r} dv &= \rho h \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} \int_{-w_x/2}^{w_x/2} u_{x,r} dr dx = \frac{4}{3} \rho \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} q_x dx \\ \int_{\omega} \rho u_{x,r}^2 dA &= \rho (\rho v_2^2 A_2 - \rho v_1^2 A_1) \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{3} \rho h \Delta x \left[v_1^2 \frac{\partial w_x}{\partial x} + 2v_1 w_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^2 \right]$$

式中脚标(1,2)分别对应于1-1和2-2断面, \$A\$ 为断面面积, 系数 \$\beta\$ 为用流量等效平均流速计算动量时的动量修正系数, 对层流 \$\beta = 4/3^{[9]}\$, 即流量等效流速与动量等效流速是不等的。则将上述各式连同式(6)代入式(7), 令 \$\Delta x \to 0\$ 并约去高阶无穷小项后等式两边同除以 \$\Delta x\$ 为

$$-h p_x \frac{\partial v_x}{\partial x} - h w_x \frac{\partial p_x}{\partial x} - 16\mu \frac{q_x}{w_x^3} = \frac{4}{3} \rho \left[\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{q_x}{h w_x} \left(2 \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{q_x}{w_x} \frac{\partial w_x}{\partial x} \right) \right] \quad (8)$$

该方程中除 \$p_x\$ 外, 尚有一个独立未知函数 \$q_x\$, 下面即来导出其表达式。

水力裂缝内一维层流流动的连续方程可表示为

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} = -h \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

将常流量时的裂缝形态方程代入上式积分并利用边界条件 \$q_0 = q/2\$ 和对称性得裂缝内的流量变化函数为

$$q_x = \begin{cases} \frac{q}{6\pi} \left(3\pi + 6\arcsin \frac{x}{a} - \frac{2x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2} \right) & -a \leq x \leq 0 \\ \frac{q}{6\pi} \left(3\pi - 6\arcsin \frac{x}{a} + \frac{2x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2} \right) & 0 \leq x \leq a \end{cases} \quad (9)$$

可见, 裂缝内不同位置处的流量并非象 GdK 解答中所设定的那样为常量, 而是随裂缝扩展和位置而变化的复杂函数, 且在裂缝尖端处有零流量 \$q(\pm a, t) = 0\$。

现在来看方程(8)的求解问题, 该方程可简化为下面的标准 \$p\$-一阶线性偏微分方程

$$\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{p_x}{w_x} \frac{\partial w_x}{\partial x} = -\frac{1}{h w_x} \left[16\mu \frac{q_x}{w_x^2} + \frac{4}{3} \rho \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{4}{3} \rho \frac{\partial q_x}{h w_x} \left(2 \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{q_x}{w_x} \frac{\partial w_x}{\partial x} \right) \right] \quad (10)$$

或表示为 $\frac{\partial p_x}{\partial x} + b(x)p_x = f(x)$

其通解为

$$\begin{cases} p_x = \frac{1}{g(x)} \left[\int f(x)g(x)dx + C(t) \right] \\ g(x) = \exp \int b(x)dx \end{cases}$$

然而这里发现方程(10)中右端第一项 \$q_x/(hw_x^2)\$ 在通解表达式中的积分不能用简单的解析函数表达, 因此, 为得出实用而简单的解析解答, 必须加以适当的近似处理。为此, 我们先来讨论裂缝内流体流动速度的分布特征。

由式(4)、(6)和(9)得裂缝内的平均流速可表示为

$$v_x = \frac{q\sqrt{a}}{6\pi h B} \left[\frac{3\pi - 6\arcsin \frac{x}{a}}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{2x}{a^2} \right] \quad 0 \leq x \leq a \quad (11)$$

$$B = \frac{4K_{1c}}{\sqrt{\pi E}}$$

其沿裂缝半长的分布曲线如图3所示。显然, 作为一种合理的近似, 可用一线性分布 \$v_x\$ 来代替缝内实际流速分布 \$v_x\$:

$$v_x = \frac{q}{6\pi h \sqrt{a} B} \left(3\pi - 1.45 \frac{x}{a} \right)$$

$$q_x = h v_x w_x$$

该近似的相对误差不超过 5%。此外，由式(11)可以验证裂尖处的流速 $v_x \rightarrow a$ 与前节给出的裂缝扩展速度 v 相等这一应当成立的事实。

在方程(10)中只对右端第一项引入这种近似处理，其他各项仍采用真实流速分布(6)式和真实流量分布(9)式，则可得方程(10)的解答为

$$p_x = \frac{8\mu q \sqrt{a}}{3\pi h B^3} \left[\frac{3\pi \arcsin \frac{x}{a}}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{1.45}{a} \right] + \frac{\rho q \sqrt{a}}{54\pi h B t} \left[\frac{12x(2\arcsin \frac{x}{a} - \pi)}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{64}{3} + \frac{20x^2}{a^2} - 9a^2 \frac{\pi^2 + 4(\arcsin \frac{x}{a})^2 - 4\pi \arcsin \frac{x}{a}}{a^2 - x^2} \right] + \frac{C(t)}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (12-1)$$

要使 p_x 在 $x = a$ 即裂尖处为有限值，即上式在 $x \rightarrow a$ 时的极值存在，必有

$$C(t) = \frac{4\pi\mu q \sqrt{a}}{hB^3} \quad (12-2)$$

需特别注意的是，该解答的导出过程中还没有考虑地应力条件，它只利用了裂缝形态恒为式(4)这一条件，因此解答只反映了缝内压力分布的相对规律，其绝对值大小还取决于地应力条件和岩石材料本身。为给出具体地应力和岩石条件下的压力分布解答，再次引用断裂判据 $K_I = K_{Ic}$ 。然而，在将解答式(12)代人(2)式计算裂尖应力强度因子 K_I 时，又出现了不能简单解析表达的积分项，为此，需对式(12)作适当的近似处理。

式(12)可表示为

$$p_x = \frac{\pi \sqrt{\pi} \mu B^3 q}{16 \sqrt{a} h K_{Ic}^3} F(x) + \frac{\rho q^2 B^2}{432 \pi a h^2 K_{Ic}^2} P(x)$$

图 4 给出了 $F(x)$ 和 $P(x)$ 的函数曲线。可以看出，它们均具有较好的线性特征，且两者的平均斜率十分接近，则可用下面相同斜率而截距不同的两个线性函数来近似表达

$$F(x) \approx 3.30 \left(1 - 0.42 \frac{x}{a} \right), \quad P(x) \approx 107 \left(1 - 0.42 \frac{x}{a} \right)$$

这意味着缝内压力分布可由下面线性方程来近似表达

$$p_x = p_w \left(1 - 0.42 \frac{x}{a} \right) \quad (13)$$

式中 p_w 为孔底压力。将(13)式代人(2)式积分并令其等于 K_{Ic} 有

$$K_I = p_w \left(\sqrt{\pi a} - 0.84 \sqrt{\frac{a}{\pi}} \right) - \sigma_h \sqrt{\pi a} = K_{Ic}$$

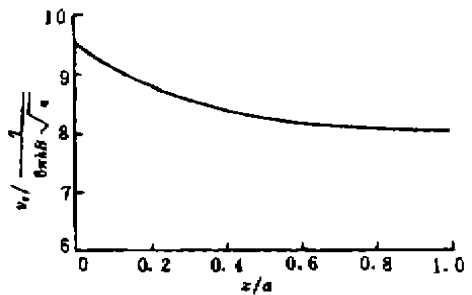


图 3 水力压裂裂缝内的流速分布

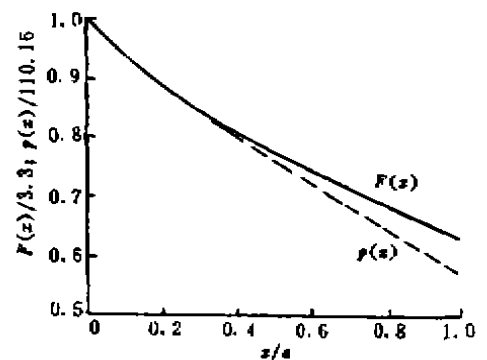


图 4 $F(x)$ 和 $P(x)$ 函数曲线

则得孔底压力为

$$p_w = \frac{0.77K_{1c}}{\sqrt{a}} + 1.365\sigma_3 \quad (14)$$

代入式(13)得缝内压力分布和裂尖处压力为

$$p_z = \left(\frac{0.77K_{1c}}{\sqrt{a}} + 1.365\sigma_3 \right) \left(1 - 0.42 \frac{x}{a} \right) \quad (15)$$

$$p_a = \frac{0.45K_{1c}}{\sqrt{a}} + 0.79\sigma_3 = 0.58p_w$$

式(14)和(15)即为一定压裂条件下缝内压力分布的全部解答,它表明,裂尖处的压力并不象 GdK 解答中所提设定的那样为零,且由于缝内压力降的存在,孔底压力将始终大于最小水平地应力才能维持裂缝的向前扩展。由于岩石的 K_{1c} 值都不很大,当裂缝扩展足够远后,扩展压力将趋于常量 $1.365\sigma_3$,这与现场实测结果近于相符¹⁾。将该解答与式(12)比较表明,压裂液粘度、常量注液流量以及岩石的弹性模量等对缝内压力分布的影响事实上均可忽略不计。

4 结论

在断裂力学和流体力学的耦合求解的基础上,给出了水力压裂裂缝形态和缝内压力分布的解析解答,它们对于从理论上深入认识水力压裂过程、裂缝形态的快速工程估算和压裂过程控制以及更复杂的水力压裂数值模型的理论验证均具有重要的理论和实际意义。所得主要结论可概括如下:

1) 水力压裂裂缝形态具有不依赖于缝内压力分布和压裂环境而呈细长椭圆的自相似扩展特征,且能在常流量或非常流量注液时通过注液体积来实现裂缝几何尺寸的快速估算。

2) 裂缝形态不依赖于缝内压力分布的自相似扩展特征使得水力压裂这一断裂力学——流体力学耦合问题得以解耦,使问题的求解简单化。

3) 缝内压力近似为 $p_z = p_w(1 - 0.42xa)$ 的线性分布特征,即事实上注液条件和压裂环境对缝内压力分布的影响均可忽略不计。

参 考 文 献

- 1 阳友奎,岩盐水力压裂的变形破裂准则,科学通报,1993,38(9):826~828
- 2 Geertsma J, de Klerk F, A Rapid Method of Predicting Width and Extent of Hydraulicall Induced Fractures, JPT, 1969(DEC); 1571~1581
- 3 Settari, A., Simulation of Hydraulic Fracturing Processes, SPEJ, 1980, 20(DEC): 487~500
- 4 Nilson R H. Similarity Solutions for Wedge-Sharped Hydraulic Fractures Driver into a Permeable Medium by a Constant Inlet Pressure, Int. J. Numer. and Analys. Methods in Geomech., 1988, 12(6): 477~495
- 5 Huang, N. C. etc. Self-similar Solution in Problems of Hydraulic Fracturing. ASME Trans. J. Applied Mech. 1990, 57(4): 877~881
- 6 阳友奎,周时光. 地层水力压裂中的应力强度因子,四川建材学院学报,1993,8(3): 39~45
- 7 黄克智. 脆性断裂力学. 北京:科学出版社,1990,95
- 8 李诗久. 工程流体力学. 北京:机械工业出版社,1986,165~168