1995年5月 第18卷第3期
重庆大学学报（自然科学版）
Journal of Chongqing University (Natural Science Edition)
Vol. 18, №. 3
May. 1995

(18) 97－100

ODE法在多目标规划中的应用*

Application of the Method of Ordinary Differential Equations in Multiobjective Programming

O221
O175

周宗放** Zhou Zongfang　　段虞荣 Duan Yurong
（重庆大学系统工程及应用数学系，重庆，630044）

A **摘　要**　在一定条件下，从多目标规划问题的任一可行解的某邻域出发，建立了沿着所建立的常微分方程组的轨线，关于部分变元总收敛到原多目标规划问题的（弱）有效解。

关键词　多目标规划；约束条件；可行解；有效解；常微分方程　ODE法
中国图书资料分类法分类号　O175；O211

ABSTRACT　In the author's previous works, a method of *ordinary differential equations for* solving multiobjective programming problem had been presented. In this paper, we further use ordinary differential equations to discuss the general multiobjective programming problem and its constraints more deeply. Under certain conditions, starting from some neibourhood of any feasible solution of multiobjective programming problem, along the trajectory of the established system of ordinary differential equations, the solution is always convergent to the (weak) efficient solution of the original multiobjective programming problem with respect to partial arguments.

KEYWORDS　multiobjective programming; constraints; feasible solution; efficient solution; *ordinary differential* equations

0　引　　言

在文[1]中，作者曾提出利用微分方程处理一般约束优化问题的方法，在文[2]中，作者又将文[1]的结果推广到多目标规划问题中。本文进一步利用常微分方程对一般多目标规划问题及其约束条件的处理作更深人的讨论，指出从问题(1)的任意可行解的某一邻域内出发的该微分方程组的解关于部分变元总收敛到原多目标规划问题的（弱）有效解。最后对所建立的微分方程组(8)给出一般性的收敛结论及例子。

1　常微分方程在多目标规划中的应用

考虑如下多目标规划问题

* 收文日期　1993-07-05
** 现在重庆邮电学院基础部工作

$$\begin{cases}\min F(x) = \{f_1(x),\cdots,f_p(x)\} \\ \text{s.t.}\ x \in \bar{s} = \{x \mid g(x) \leqslant 0, h(x) = 0, x \in E^n\}\end{cases} \tag{1}$$

其中 $g(x) \in E^m, h(x) \in E^r, F(x), g(x), h(x) \in C^2$

定义 1 称 $\bar{x} \in \bar{s}$ 为问题(1)的 Pareto 有效解,若不存在 $x \in \bar{s}$,使 $f_i(x) \leqslant f_i(\bar{x}), i = 1, \cdots, p$,其中至少有一个严格不等式成立。

定义 2 称 $\bar{x} \in \bar{s}$ 为问题(1)的 Pareto 弱有效解,若不存在 $x \in \bar{s}$,使 $F(x) < F(\bar{x})$ 成立。

在(1)中引入松弛变量 $z \in E^m$,则问题(1)化为如下形式

$$\begin{cases}\min F(y) = F(x) \\ \text{s.t.}\ y \in s = \{y = (x,z) \mid H(y) = 0, y \in E^{n+m}\}\end{cases} \tag{2}$$

其中
$$H(y) = \begin{bmatrix} h(x) \\ g(x) + z^2/2 \end{bmatrix} \in E^{r+m}$$

记 $I(x) = \{i \mid g_i(x) = 0, i = 1,\cdots,m\}$ 为 $x \in \bar{s}$ 处起作用指标集,$g_I(x) = \{g_i(x) \mid i \in I(x)\}$,$z_I = \{z_i \mid i \in I(x)\}$

$$\bar{H}(y) = \begin{bmatrix} h(x) \\ g_I(x) + z_I^2/2 \end{bmatrix}$$

根据文[2],有以下结论

命题 1 设 $u(x)$ 为定义在 $\bar{s}$ 上具有连续二阶导数的实值函数,$\bar{y} \in s, \bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_r, \bar{\lambda}_m)^T \in E^{r+m}$,若$(\bar{y},\bar{\lambda})$满足 $\nabla\varphi(\bar{y},\bar{\lambda}) = 0$,且 $\nabla^2\varphi(\bar{y},\bar{\lambda})$ 在 $M(\bar{y})$ 上正定,则$(\bar{y},\bar{\lambda})$是函数 $\varphi(y,\lambda) = u(x) + \lambda^T H(y)$ 的鞍点。这里 $M(\bar{y}) = \{y \mid \nabla \bar{H}(\bar{y})^T y = 0, y \in E^{n+m}\}$.

命题 2 设$(\bar{y},\bar{\lambda})$是函数 $\varphi(y,\lambda)$ 的鞍点,则 $\bar{y}$ 关于部分变元 x 是问题(1)的(弱)有效解。

由此,我们得到以下重要定理

定理 1 设 $\bar{y} \in s, \bar{\lambda} \in E^{r+m}$,若 $\nabla\varphi(\bar{y},\bar{\lambda}) = 0$ 成立,且 $\nabla^2\varphi(\bar{y},\bar{\lambda})$ 在 $M(\bar{y})$ 上正定,则 $\bar{y}$ 关于部分变元 x 是问题(1)的(弱)有效解。

下面建立常微分方程组

$$\begin{cases} B_n\dot{x} + \nabla h(x)\lambda_r + \nabla g(x)\lambda_m = -\nabla u(x) \\ B_m\dot{z} + zI_m\lambda_m = 0 \\ \nabla h(x)^T\dot{x} = -h(x) \\ \nabla g(x)^T\dot{x} + zI_m\dot{z} = -g(x) - z^2/2 \end{cases} \tag{3}$$

其中 B_n, B_m 分别为 n 阶和 m 阶非奇异矩阵,$zI_m = diag(z_1,\cdots,z_m)$

下设 $\nabla h_j(x), \nabla g_i(x) (j = 1,\cdots,r; i \in I(x))$ 在 $\bar{s}$ 上线性无关。

由于 B_n, B_m 和 $\nabla H^T B^{-1} \nabla H$ 非奇异,其中 $B = \begin{bmatrix} B_n & 0 \\ 0 & B_m \end{bmatrix}$

从常微分方程组(3)可解出

$$\dot{y} = \varphi(y) = -PB^{-1}\nabla H(y) - \bar{p}H(y) \tag{4}$$

$$\lambda = -(\nabla H^T B^{-1} \nabla H)^{-1} \nabla H^T B^{-1} \nabla u(x) + (\nabla H^T B^{-1} \nabla H)^{-1} H \tag{5}$$

这里
$$p = I + B^{-1}(\nabla H^T B^{-1} \nabla H)^{-1} \nabla H^T \tag{6}$$

$$\bar{p} = B^{-1}(\nabla H^T B^{-1} \nabla H)^{-1} \tag{7}$$

定理 2 设 $y^* \in E^{n+m}$,则 y^* 是常微分方程组(3)的奇解的充要条件是 $y^* \in s$,且存在 $\lambda^* \in E^{r+m}$,满足 $\nabla\varphi(y^*,\lambda^*) = 0$

证 设 $y^* \in s$，且存在 $\lambda^* \in E^{m+r}$，使 $\nabla\varphi(y^*,\lambda^*) = 0 \Rightarrow \nabla H(y^*)^T\lambda^* + \nabla u(x^*) = 0$

以及
$$H(y^*) = 0$$
由(3)式知 y^* 是常微分方程组(3)的一个奇解。

反之，设 y^* 是方程组(3)的一个奇解，则下式成立
$$\begin{cases}\nabla h(x^*)\lambda_r^* + \nabla g(x^*)\lambda_m^* = -\nabla u(x^*)\\ z^* I_m \lambda_m^* = 0\\ H(y^*) = 0\end{cases}$$
由此可推出 $y^* \in s$，且满足 $\nabla\varphi(y^*,\lambda^*) = 0$ 证毕

推论 设 y^* 是微分方程组(3)的奇解，如果 $\nabla^2\varphi(y^*,\lambda^*)$ 在 $M(y^*)$ 上正定，则 y^* 关于部分变元 x 是问题(1)的(弱)有效解。这里 λ^* 由(5)式确定。

2 约束条件的讨论

下面进一步利用微分方程对问题(1)的约束条件进行讨论。问题(1)的可行解应满足的微分方程组为
$$\begin{cases}\nabla h(x)^T\dot{x} = -h(x)\\ \nabla g(x)^T\dot{x} + zI_m\dot{z} = -g(x) - z^2/2\end{cases} \tag{8}$$
简记为
$$\nabla H(y)\dot{y} = -H(y) \tag{9}$$
或等价地
$$\mathrm{d}H(y)/\mathrm{d}t = -H(y)$$
显然上述微分方程组的解满足初积分
$$H(y(t,y^0)) = \exp(-t)H(y^0) \tag{10}$$
以下设 $\nabla H(y)$ 是满秩阵。

设 $L(y)$ 是 $E^{n+m} \to E^{n+m}$ 的一个任意映射，则可证(9)式与下式等价[7].
$$\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = -\nabla H^+(y)H(y) + (I - \nabla H^+(y)\nabla H(y))L(y) \tag{11}$$
其中 $\nabla H^+(y)$ 为 $\nabla H(y)$ 的 Mooré-Penrose 广义逆，I 是单位阵。

根据文[7]，易得以下结论

命题 3 设 $\nabla H(y^0)$ 满秩，y^0 为初始点，且 $L(y)$ 充分光滑，则存在(11)式的一个解 $y(t,y^0)$，$t \in [0,T]$，可以延拓，直到其轨线逼近奇异点集 $N = \{y \in E^{n+m} | \nabla H(y)$ 的秩 $< m + r\}$ 否则 $T = +\infty$，或者发散，

为讨论方便，不妨取 $L(y) = 0$，则(11)式化为
$$\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = -\nabla H^+(y)H(y) \tag{12}$$
根据文[7]，易得以下结论

定理 3 设 $\bar{y} \in s$，如果 $\nabla H(\bar{y})$ 满秩，则微分方程组(12)的奇解 $\bar{y}$ 关于部分变元 x 是稳定的。

定理 4 设 $\bar{y} \in s$，且 $\nabla H(\bar{y})$ 满秩，则存在 $\bar{y}$ 的某个邻域 U，使得微分方程组(12)的从 U 中任一点 y^0 出发的解 $y(t,y^0)$ 的存在域为 $t \in [0,+\infty)$，并且关于部分变元 x 总收敛到问题(1)的可行解。

由以上讨论，一般地对常微分方程组(12)有以下结论

定理 5 常微分方程组(12)的解轨线要么逼近于奇异点集 N；要么关于部分变元 x 收敛到问题(1)的可行解；要么发散。

证 如果方程组(12)的解轨线不逼近 N，也不发散，由命题 3 知 $T = +\infty$，即解的存在

区间为 $0 \leqslant t < +\infty$，令解的正极限集为 Γ^+（见文[1]），由(10) 式知 $\Gamma^+ \in s$，再由定理 4 即得证。 证毕

根据定理 2 的推论和定理 4，有以下重要结论。

定理 6 在定理 2 推论和定理 4 的条件下，从多目标规划问题(1) 的任一可行解的某一邻域出发，沿着常微分方程组(3) 的轨线，不仅收敛到原问题的可行解，而且收敛到原问题的(弱) 有效解。

例 考虑如下多目标规划问题

$$\begin{cases}\min F(x_1,x_2) = \{2x_1 - x_2, -x_2\} \\ \text{s.t.}\ x \in \bar{s} = \{x \in E^2 \mid h_1(x) = x_1^2 - x_2 = 0, h_2(x) = x_2^2 - x_1 = 0\}\end{cases}$$

由(9) 式得其可行解应满足的常微分方程组为

$$(1 - 4x_1x_2)\begin{pmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x_1^2x_2 - x_2^2 - x_1 \\ 2x_2^2x_1 - x_1^2 - x_2\end{pmatrix}$$

容易求得原问题的有效解(1,1) 和(0,0) 的吸引域分别是

$$D_1 = \{(x_1,x_2) \mid 1 - 4x_1x_2 < 0 \text{ 和 } x_1 > 0\}$$

$$D_2 = \{(x_1,x_2) \mid 1 - 4x_1x_2 > 0 \text{ 和 } x_1 + x_2 + 1 > 0\}$$

同时注意从域 $D = \{(x_1,x_2) \mid x_1 + x_2 + 1 \leqslant 0\}$

内任一点出发的轨线不能收敛到原问题的有效解，而逼近奇异点集

$$N = \{(x_1,x_2) \mid 1 - 4x_1x_2 = 0\}$$

3 结 语

利用常微分方程讨论和求解单目标优化问题，已有不少文章，并已形成初步算法[1]，但用于多目标优化问题的讨论，目前这方面的工作还做得很少，可以说还仅仅是一种尝试，作者在文[2] 中曾讨论了利用常微分方程求多目标规划问题(弱) 有效解的一般方法和步骤。本文进一步讨论利用常微分方程描述多目标规划问题及其可行域，由此建立求解多目标规划问题的另一条有效途径。由于常微分方程的数值积分法目前已基本趋于成熟，而求解优化问题，特别是多目标优化问题的算法还很不成熟，因此这方面的研究具有一定的理论意义和应用价值，目前已越来越得到应用数学和运筹学工作者的关注。

参 考 文 献

1 周宗放．微分方程在约束优化中的应用．重庆邮电学院学报，1991，3(1)，75～82

2 周宗放．多目标规划的微分方程解法．见：王荫清主编．应用数学文集．成都科技大学出版社出版，1992，28～33

3 周宗放．稳定性理论在优化中的应用．重庆邮电学院学报，1991，3(2)：71～78

4 倪国熙编．常用的矩阵理论和方法．上海：上海科学出版社，1984，35～67

5 TANABE K. An Algorithm for Constrained Maximization in Nonlinear Programming, J. Operations Research Society of Japan, Tokyo, Vol, 17, 1974, 184～201

6 TANABE K. A Geometric Method in Nonlinear Programming. J. Optimization Theory and Applications, 1982, 30 (2)：181～210

7 周宗放．处理优化约束条件的微分方程法．重庆邮电学院学报，1993，5(1)：85～89