

④ 21-28

三维多弹性体多接触面边界单元法^{*}

Boundary Element Method of Three-dimensional Elastic
Multi-body Contact Problem with Multi-contact Surface

刘崇德
Liu Chongde

何亚梅
He Yamei

0343.3

(重庆大学机械工程一系, 重庆, 630044)

A 摘要 推导了多弹性体多接触面无摩擦接触问题的边界单元法的计算公式和方法, 并编制了相应的 FORTRAN 程序。所给出的算例说明对多体接触问题只能根据不同的对象编制不同的多体多接触面计算程序来计算, 用两体接触问题的解法近似计算多体接触问题其误差甚大。

关键词 多弹性体; 多接触面; 边界单元法; 接触问题

边界元法

中国图书资料分类号 TH114

ABSTRACT The computational method and formula of elastic multi-body contact problem with multi-contact surface by boundary element method were carried out and the corresponding fortran program was compiled as well. The example, given in the paper, shows that the special multi-body contact with multi-contact surface program must be compiled for special multi-contact problem according to different object. Using the method for solving two-body contact problem to approximately solve multi-body contact problem with multi-contact surface will lead to large error.

KEYWORDS elastic multi-body; multi-contact surface; boundary element method; contact problem

0 引 言

目前用边界元法研究接触问题所涉及的对象一般是两物体组成的系统, 多物体组成的系统近年来也有人做过^[1,2], 但文[2]中虽然研究的对象是三物体组成的系统, 但所建立的边界元系统仍是以二物体为研究对象, 只是在边界耦合条件中, 在接触边界的法线方向上考虑了中间物体(滚子)的影响。作者在文[1]中曾以三物体为对象建立边界元系统方程, 但当时根据具体工程对象确定的是三物体中有一个物体存在两个接触区, 另外两个物体只有一个接触区, 也可以说是三物体接触的一种特殊情况。本文中作者将在以前工作的基础上进一步研究三物体相互接触的一般情况, 即三物体相互两两接触(图1), 由此推论到多于三物体的

* 收文日期 1994-12-07

中国工程物理研究院基金项目

多体多接触面问题的边界元基本方法。文中的算例还说明在多体接触问题中若用两物体接触问题来局部近似求解所带来的误差。

1 三维多弹性体多接触面接触问题边界元法

作者研究的弹性多体接触问题中具有代表性的三物体两两相互接触模型如图1,由于不计摩擦,所以可以用总载荷一次加载来进行计算^[3]。

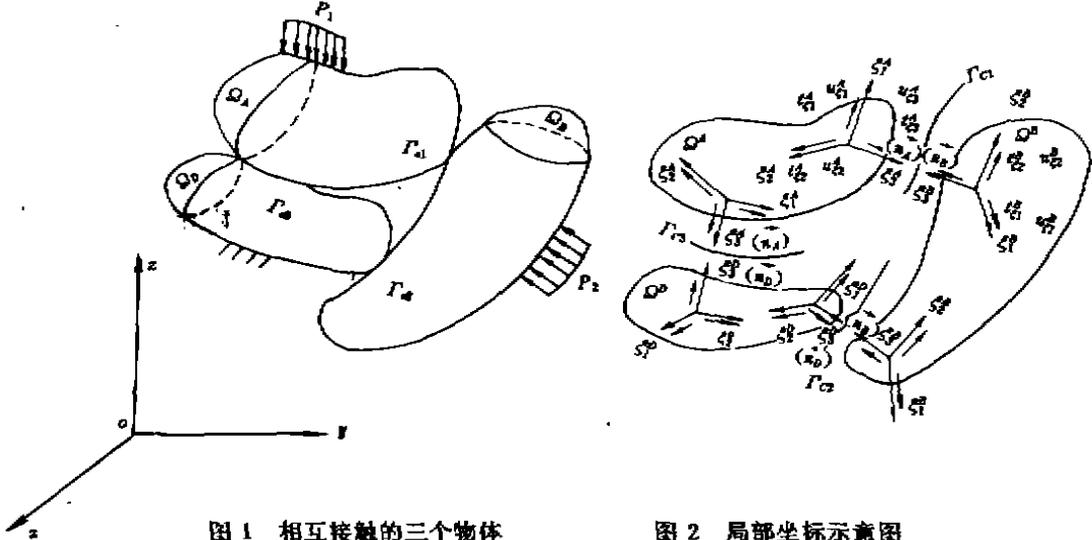


图1 相互接触的三个物体

图2 局部坐标示意图

A、B、D三弹性体两两接触,有三个接触区 $\Gamma_{01}, \Gamma_{02}, \Gamma_{03}$, 各物体的接触区为 Γ_i , 且 $\Gamma_i = \Gamma_{\sigma i} + \Gamma_{\infty i}$. 其中 $\Gamma_{\sigma i}$ 为预接触区(自由表面), $\Gamma_{\infty i}$ 为接触区. 因此, 三物体的接触区分别为: (图2)

$$\Gamma_i^A = \Gamma_{01} + \Gamma_{03}, \quad \Gamma_i^B = \Gamma_{01} + \Gamma_{02}, \quad \Gamma_i^D = \Gamma_{02} + \Gamma_{03}$$

其中 Γ_i^A 为物体 Ω_A 的接触区, Γ_i^B 和 Γ_i^D 分别为 Ω^B 和 Ω^D 的接触区。

再将 $\Gamma_{0i} (i = 1, 2, 3)$ 划分为接触区 $\Gamma_{\infty i} (i = 1, 2, 3)$, 和 $\Gamma_{\sigma i} (i = 1, 2, 3)$ (预接触区)

$$\Gamma_i^A = \Gamma_{\infty 01} + \Gamma_{\sigma 01} + \Gamma_{\infty 03} + \Gamma_{\sigma 03}$$

$$\Gamma_i^B = \Gamma_{\infty 01} + \Gamma_{\sigma 01} + \Gamma_{\infty 02} + \Gamma_{\sigma 02}$$

$$\Gamma_i^D = \Gamma_{\infty 02} + \Gamma_{\sigma 02} + \Gamma_{\infty 03} + \Gamma_{\sigma 03}$$

而 $\Gamma_{\infty i}^A, \Gamma_{\infty i}^B$ 和 $\Gamma_{\infty i}^D$ 又可写成

$$\Gamma_{\infty i}^A = \Gamma_{\infty 01}^A + \Gamma_{\infty 03}^A \quad \Gamma_{\infty i}^B = \Gamma_{\infty 01}^B + \Gamma_{\infty 02}^B \quad \Gamma_{\infty i}^D = \Gamma_{\infty 02}^D + \Gamma_{\infty 03}^D$$

边界上的位移及面力用局部坐标表示, 如图2. 其中 ξ_1, ξ_2 及 ξ_3 为局部坐标的三个方向。

在不计摩擦的条件下, 任一可能接触的点(如 Ω^A 上的 ω_0^A 点和 Ω^B 上的 ω_0^B) 在 Γ_{01} 接触区有如下的接触条件:

1) 接触条件(滑动条件)

$$\left. \begin{aligned} t_{31}^A - t_{31}^B &= 0 \\ t_{11}^A = t_{31}^B = t_{22}^A = t_{22}^B &= 0 \\ u_{31}^A + u_{31}^B &= u_{31}^0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\omega_0^A \in \Gamma_{0c1} \\ &\omega_0^B \in \Gamma_{0c1} \end{aligned}$$

式中 t_{31}^A 和 u_{31}^A 表示 Ω^A 上的 ω_0^A 点在第一接触区 (Γ_{01}) 上 ξ_3 (法向) 方向上的面力和位移。

2) 分离条件(预接触区)

$$\left. \begin{aligned} t_{31}^{AA} = t_{31}^{BB} = 0 \\ u_{31}^{AA} + u_{31}^{BB} < u_{31}^0 \end{aligned} \right\} \omega_{(AA)}^{(BB)} \in \Gamma_{CP1}$$

其中 $K = 1, 2, 3$ 为局部坐标的三个方向。

同理, 在 Γ_{C2}, Γ_{C3} 上同样可以建立和以上各式相应的关系式。

令 \vec{n} 为接触点的法向量, u^0 是 Γ_{C1} 上接触点对之间的初始间隙, 则

$$u_{31}^0 = \frac{\vec{n}_{AA} - \vec{n}_{BB}}{|\vec{n}_{AA} - \vec{n}_{BB}|} \cdot \vec{u}^0 \quad (1)$$

式中, $I = 1, 2, 3$ 代表 Γ_1, Γ_2 和 Γ_3 接触区。

在不计体力情况下, 边界积分方程的普遍形式为^[3]

$$\begin{aligned} C_{ij}u_i(P) + \int_{\Gamma} u_j(Q)T_{ij}(P, Q)d\Gamma(Q) \\ = \int_{\Gamma} t_j(Q)U_{ij}(P, Q)d\Gamma(Q) \end{aligned}$$

写成矩阵形式的物体边界积分方程组为

$$[H]\{u\} = G\{t\} \quad (2)$$

我们按照以上方法分别建立 Ω^A, Ω^B 和 Ω^0 的边界积分方程 Ω^A :

$$\begin{aligned} C_{ij}(P_0^A)u_j(P_0^A) + \int_{\Gamma^A - \Gamma_C^A} T_{ij}(P_0^A, Q_0^A)u_j(Q_0^A)d\Gamma(Q_0^A) \\ + \int_{\Gamma_{CP}} T_{ij}(P_0^A, Q_0^A)u_{3k}(Q_0^A)a_{3k}(Q_0^A)d\Gamma(Q_0^A) \\ + \int_{\Gamma_{CC}^A} T_{ij}(P_0^A, Q_0^A)u_{31}(Q_0^A)a_{31}(Q_0^A)d\Gamma(Q_0^A) \\ + \int_{\Gamma_{CC}^A} T_{ij}(P_0^A, Q_0^A)u_{32}(Q_0^A)a_{32}(Q_0^A)d\Gamma(Q_0^A) \\ + \int_{\Gamma_{CC1}^A} T_{ij}(P_0^A, Q_0^A) \cdot [u_{31}^0 - u_{31}(Q_0^A)] \cdot a_{33}(Q_0^A)d\Gamma(Q_0^A) \\ + \int_{\Gamma_{CC3}^A} T_{ij}(P_0^A, Q_0^A)u_{33}(Q_0^A) \cdot a_{33}(Q_0^A)d\Gamma(Q_0^A) \\ - \int_{\Gamma^A - \Gamma_C^A} U_{ij}(P_0^A, Q_0^A)t_j(Q_0^A) \cdot d\Gamma(Q_0^A) \\ - \int_{\Gamma_{CC1}^A} U_{ij}(P_0^A, Q_0^A)t_{31}(Q_0^A) \cdot a_{33}(Q_0^A)d\Gamma(Q_0^A) \\ - \int_{\Gamma_{CC3}^A} U_{ij}(P_0^A, Q_0^A)t_{33}(Q_0^A) \cdot a_{33}(Q_0^A)d\Gamma(Q_0^A) \\ = 0 \end{aligned}$$

其中: $u_j(P_0^A) = u_{3k}(P_0^A) \cdot a_{3k}(P_0^A)$

$u_{31}(P_0^A) = u_{31}^0 - u_{31}(Q_0^A)$

$$P_i^k \in \Gamma_i^k \quad (3)$$

Ω^k :

$$\begin{aligned} & C_{ij}(P_i^k)u_j(P_i^k) + \int_{r^p-r_c^p} T_{ij}(P_i^k, Q_i^k)u_j(Q_i^k)d\Gamma(Q_i^k) \\ & + \int_{r_c^p} T_{ij}(P_i^k, Q_i^k)u_{\alpha_j}(Q_i^k)\alpha_{\beta_i}(Q_i^k)d\Gamma(Q_i^k) \\ & - \int_{r^p-r_c^p} U_{ij}(P_i^k, Q_i^k)t_{j\alpha_i}(Q_i^k) \cdot d\Gamma(Q_i^k) \\ & - \int_{r_{cc}^p} U_{ij}(P_i^k, Q_i^k)t_{\beta_j\alpha_i}(Q_i^k) \cdot \alpha_{\beta_i}(Q_i^k)d\Gamma(Q_i^k) = 0 \end{aligned}$$

其中: $u_j(P_i^k) = u_{\alpha_j}(P_i^k) \cdot \alpha_{\beta_j}(P_i^k)$ (4)

Ω^p :

$$\begin{aligned} & C_{ij}(P_i^p)u_j(P_i^p) + \int_{r^p-r_c^p} T_{ij}(P_i^p, Q_i^p)u_j(Q_i^p)d\Gamma(Q_i^p) \\ & + \int_{r_{cp}^p} T_{ij}(P_i^p, Q_i^p)u_{\alpha_j}(Q_i^p)\alpha_{\beta_i}(Q_i^p)d\Gamma(Q_i^p) \\ & + \int_{r_{cc}^p} T_{ij}(P_i^p, Q_i^p)u_{\alpha_1}(Q_i^p)\alpha_{\beta_1}(Q_i^p)d\Gamma(Q_i^p) \\ & + \int_{r_{cc}^p} T_{ij}(P_i^p, Q_i^p)u_{\alpha_2}(Q_i^p)\alpha_{\beta_2}(Q_i^p)d\Gamma(Q_i^p) \\ & + \int_{r_{cc2}^p} T_{ij}(P_i^p, Q_i^p) \cdot [u_{\beta_2\alpha_2}^p - u_{\beta_2\alpha_2}(Q_i^p)] \cdot \alpha_{\beta_2}(Q_i^p)d\Gamma(Q_i^p) \\ & + \int_{r_{cc3}^p} T_{ij}(P_i^p, Q_i^p) \cdot [u_{\beta_3\alpha_3}^p - u_{\beta_3\alpha_3}(Q_i^p)] \cdot \alpha_{\beta_3}(Q_i^p)d\Gamma(Q_i^p) \\ & - \int_{r_{cc2}^p} U_{ij}(P_i^p, Q_i^p)t_{\beta_2\alpha_2}(Q_i^p) \cdot \alpha_{\beta_2}(Q_i^p)d\Gamma(Q_i^p) \\ & - \int_{r_{cc3}^p} U_{ij}(P_i^p, Q_i^p)t_{\beta_3\alpha_3}(Q_i^p) \cdot \alpha_{\beta_3}(Q_i^p)d\Gamma(Q_i^p) \\ & = 0 \end{aligned}$$

其中: $u_j(P_i^p) = u_{\alpha_j}(P_i^p) \cdot \alpha_{\beta_j}(P_i^p)$

$$u_{\beta_2\alpha_2}(P_i^p) = u_{\beta_2\alpha_2}^p - u_{\beta_2\alpha_2}(Q_i^p)$$

$$u_{\beta_3\alpha_3}(P_i^p) = u_{\beta_3\alpha_3}^p - u_{\beta_3\alpha_3}(Q_i^p)$$

$$P_i^p \in \Gamma_i^p \quad (5)$$

(3) ~ (5) 式中

α_{β_j} ($j = 1, 2, 3; K = 1, 2, 3$) 为局部坐标 ξ_j 相对于总体坐标 x_K 轴的方向余弦。

$u_{\beta_i\alpha_i}^p$ ($i = 1, 2, 3$) 为各接触区接触点对初始间隙。

u_{ξ_j} ($j = 1, 2, 3; K = 1, 2, 3$) 为各接触区上的相应节点位移。

I 为接触区序号, ξ_j 为局部坐标的三个方向。

对物体 A, B, D 边界进行离散, 建立矩阵方程, 将已知边界条件(面力和位移)代入, 并将

已知项移到方程右端即可写出以下各式(其中 H 和 G 的上标, 下标意义和 u, t 的上标, 下标意义相同并一一对应).

Ω^A :

$$\begin{aligned}
 & [H^{A-c} \quad -G^{A-c} \quad \hat{H}^{ACP} \quad \hat{H}_{s_1}^{ACC} \quad \hat{H}_{s_2}^{ACC} \quad (-\hat{H}_{s_1}^{ACC}) \quad \hat{H}_{s_3}^{ACC} \quad -\hat{G}_{s_1}^{ACC} \quad -\hat{G}_{s_3}^{ACC}] \left\{ \begin{array}{l} u^{A-c} \\ t^{A-c} \\ u_{s_1}^{ACP} \\ u_{s_1}^{ACC} \\ u_{s_2}^{ACC} \\ u_{s_3}^{ACC} \\ t_{s_1}^{ACC} \\ t_{s_3}^{ACC} \end{array} \right\} \\
 & = [-\bar{H}^{A-c} \quad \bar{G}^{A-c} \quad -\hat{H}_{s_1}^{ACC}] \left\{ \begin{array}{l} \bar{u}^{A-c} \\ \bar{t}^{A-c} \\ \bar{u}_{s_1}^0 \end{array} \right\} \quad (6)
 \end{aligned}$$

Ω^B :

$$\begin{aligned}
 & [H^{B-c} \quad -G^{B-c} \quad \hat{H}^{BCP} \quad \hat{H}_{s_1}^{BCC} \quad \hat{H}_{s_2}^{BCC} \quad \hat{H}_{s_3}^{BCC} \quad \hat{H}_{s_4}^{BCC} \quad -\hat{G}_{s_1}^{BCC} \quad -\hat{G}_{s_3}^{BCC}] \left\{ \begin{array}{l} u^{B-c} \\ t^{B-c} \\ u_{s_1}^{BCP} \\ u_{s_1}^{BCC} \\ u_{s_2}^{BCC} \\ u_{s_3}^{BCC} \\ u_{s_4}^{BCC} \\ t_{s_1}^{BCC} \\ t_{s_3}^{BCC} \end{array} \right\} \\
 & = [-\bar{H}^{B-c} \quad \bar{G}^{B-c}] \left\{ \begin{array}{l} \bar{u}^{B-c} \\ \bar{t}^{B-c} \end{array} \right\} \quad (7)
 \end{aligned}$$

Ω^D :

$$\begin{aligned}
 & [H^{D-c} \quad -G^{D-c} \quad \hat{H}^{DCP} \quad \hat{H}_{s_1}^{DCC} \quad \hat{H}_{s_2}^{DCC} \quad (-\hat{H}_{s_2}^{DCC}) \quad (-\hat{H}_{s_3}^{DCC}) \quad -\hat{G}_{s_2}^{DCC} \quad -\hat{G}_{s_3}^{DCC}] \left\{ \begin{array}{l} u^{D-c} \\ t^{D-c} \\ u_{s_1}^{DCP} \\ u_{s_1}^{DCC} \\ u_{s_2}^{DCC} \\ u_{s_3}^{DCC} \\ t_{s_2}^{DCC} \\ t_{s_3}^{DCC} \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\{b^{cc}\} = \begin{Bmatrix} b_{\Gamma_1}^{0A} \\ b_{\Gamma_1}^{0B} \\ b_{\Gamma_1}^{0P} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\hat{H}_{531}^{00} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \{\bar{u}_{531}^0\} \\ + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\hat{H}_{332}^{00} \end{bmatrix} \{u_{332}^0\} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\hat{H}_{333}^{00} \end{bmatrix} \{u_{333}^0\}$$

从上式可见,某物体的接触区 1 所产生的 u 和 t 对本物体另一接触区的 u, t 是有影响的。

求解方程(10) 得出 $\{x^{cc}\}$, 代入方程(9) 即可求出 $\{x^c\}$, 至此, 接触区(包括自由边界和滑动边界)的未知量均已求出。当 $\{x^c\}$ 满足接触收敛条件时, 则认为收敛, 结束迭代。否则重新假定 Γ_{cc} 和 Γ_{cp} , 并继续进行迭代计算直至满足收敛条件为止。

在迭代过程中, 接触收敛条件为:

1) 单元接触收敛条件

在 Γ_{cp} : $t_{ij}^A = t_{ij}^B = 0 \quad j = 1, 2, 3$

$$\frac{1}{\Delta^{AA}} \int_{\Delta^{AA}} u_{331}^{AA} d\Gamma + \frac{1}{\Delta^{BB}} \int_{\Delta^{BB}} u_{331}^{BB} d\Gamma \leq \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta} u_{331}^0 d\Gamma \quad (11)$$

在 Γ_{cc} :

$$t_{31}^{AA} = t_{31}^{BB} = t_{32}^{AA} = t_{32}^{BB} = 0$$

$$t_{33}^{AA} - t_{33}^{BB} = 0$$

$$\frac{1}{\Delta^{AA}} \int_{\Delta^{AA}} t_{33}^{AA} d\Gamma < 0$$

$$\frac{1}{\Delta^{AA}} \int_{\Delta^{AA}} u_{331}^{AA} d\Gamma + \frac{1}{\Delta^{BB}} \int_{\Delta^{BB}} u_{331}^{BB} d\Gamma = \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta} u_{331}^0 d\Gamma \quad (12)$$

AA, BB 为构成 Γ 接触区的两个物体的接触点对的代码。

Δ^{AA}, Δ^{BB} 是 AA 和 BB 所占有的某单元的面积, 而 $\Delta = \frac{1}{2}(\Delta^{AA} + \Delta^{BB})$

2) 节点接触收敛条件

在以接触单元判断满足接触条件后, 还要对接触节点进行判断, 看其是否满足接触条件, 若不满足则仍要改变假定接触边界, 重新迭代。关于节点的接触判断请见以上接触点判断公式。

2 数值计算结果及分析

笔者曾编制 FORTRAN 程序, 对图(3) 所示的算例进行了计算。

其中数值解是采用 4~8 结点等参面元作为边界单元的。在圆柱 Ω_A 和 Ω_B 表面分别划分了 77 个单元, 149 个结点, 在平板 Ω_b 上共划分了 60 个单元, 134 个结点。在接触区 Γ_{c1} 上共划分 12 个单元, 21 个结点, 在接触区 Γ_{c2} 和 Γ_{c3} 上也分别划分了 12 个单元和 21 个结点。以上接触区 Γ_{c1}, Γ_{c2} 和 Γ_{c3} 均包括预接触区和接触区。而理论解是采用 Hertz 公式以两物体分别计算的。例如用理论解计算 Γ_{c3} 上的最大接触压力和接触区时就按圆柱 Ω_A 和固定平板 Ω_b 相接

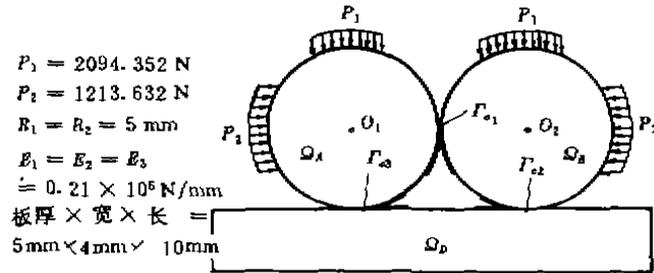


图3 三物体两两接触算例示意图

$$P_1 = 2094.352 \text{ N} \quad P_2 = 1213.632 \text{ N}$$

$$R_1 = R_2 = 5 \text{ mm} \quad E_1 = E_2 = E_3 = 0.21 \times 10^6 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{板厚} \times \text{宽} \times \text{长} = 5 \text{ mm} \times 4 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$$

触,在 Ω_1 上部施加均布力,其合力为 $P_1 = 2094.352 \text{ N}$ 来计算。同理, Γ_{c1} 是由圆柱体 Ω_1 和 Ω_2 相接触在左右两边各加力 P_2 。根据两者计算结果列于下表上的数据可知两者相对差值对最大接触压力分别为7.97%和12.07%,接触区 b 的相对差值为6.59%和10.58%。另外从图3可见三物体三接触面接触时,其接触区为粗黑线所示,它已和理论解的接触区 b 对称于中心线大不相同了。由此得出结论,对多物体多接触面相互接触问题不能用两物体接触问题来代替作近似计算,而必须用多体多接触面的计算原理,根据具体不同对象编制相应的程序来进行计算。

数值解、理论解对比表

	相对差值(%)		数值解		理论解(二物体)	
	δ_p	δ_b	P_{\max}/N	b/mm	P_{\max}/N	b/mm
Γ_{c1}	7.97	6.59	720.5	0.53969	667.313	0.57776
Γ_{c2}	12.07	10.58	694.69	0.9598	619.869	1.0734
Γ_{c3}	12.07	10.58	694.69	0.9598	619.869	1.0734

参 考 文 献

- 1 刘崇德等. 求解多弹性接触问题的边界元法及其在大型挖掘机中的应用. 重庆大学学报, 1992, 15(6): 1~9
- 2 申光宪, 兰兴昌. 多列滚动轴承三维接触压力分布的数值分析. 计算结构力学及其应用, 7(2): 9~15
- 3 陈万吉等用有限元混合法分析弹性接触问题. 见: 主编大连工学院, 教育部高等学校1978年计算结构力学学术交流会议论文集. (第一集). 大连: 大连工学院出版社, 1978. 1~3
- 4 布瑞比亚 C. A. 著. 工程师用的边界单元法. 武际可, 付子智译. 北京: 科学出版社, 1986. 98~120
- 5 布瑞比亚 C. A. 著. 边界元法的工程应用. 张治强译. 西安: 陕西科学技术出版社, 1985. 129~162
- 6 田中正隆, 田中喜久昭. 边界元法的基础与应用. 北京: 煤炭工业出版社, 1987. 38~55
- 7 刘崇德, 黄昌华. 用有限元混合法分析多弹性体的相互接触问题. 计算结构力学及其应用, 1989(1): 168~176
- 8 刘述斌. 三维弹性接触问题的边界元法. 东北工学院学报, 1987(3): 278~284
- 9 Andersson T, Fredriksson B, Person B, G. A. The boundary element method applied to two-dimensional contact problems, proceeding of the Second International seminar on Recent Advances in Boundary Element Methods Southampton, Ed. Brebbia C A, CML Publication, 1980