1995 年 7 月 重庆大学学报 （自然科学版） Vol. 18, №. 4
第 18 卷第 4 期 Journal of Chongqing University (Natural Science Edition) Jul. 1995

(15) 86-90

排队系统 $Geo/M/n$ 的 k 阶忙期*

The k Order Busy Period of Queueing System $Geo/M/n$

孙荣恒 孙 宇
Sun Rongheng Sun Yu
（重庆大学应用数学系，重庆，630044）

O226

A **摘 要** 讨论了排队系统 $Geo/M/n$ 的 $k(k\geqslant0)$ 阶忙期，获得了此系统 k 阶忙期的分布和前两阶矩的简单表达式。

关键词 忙期；k 阶忙期；贝努里过程 排队系统

中国图书资料分类法分类号 O226

ABSTRACT In the paper, we discuss the $k(k\geqslant0)$ order busy period for the queueing system $Geo/M/n$, and obtain the simple expression of the distribution and the first two monents of the k order busy period for the system.

KEYWORDS busy period; k orker busy period; Bernoulli process

0 引 言

对于排队系统 $GI/M/n$，文献[1]给出了其 k 阶忙期分布的表达式，由于这个表达式非常复杂，笔者在文献[2]中考虑了排队系统 $M/M/n$ 与 $Geo/Geo/n$ 的 $k(k\geqslant0)$ 阶忙期，给出了其分布和前两阶矩的简单表达式。笔者在本文中考虑系统 $Geo/M/n$ 的 $k(k\geqslant0)$ 阶忙期，得到了与[2]类似的结果。

关于排队系统 $Geo/M/n$，除到达间隔时间为参数是 λ 的几何分布外，其它假设与[2]中系统 $M/M/n$ 相同。忙期与 k 阶忙期的定义与[2]相同。

1 引 理

定义 1 称随机序列 $\{N(m),m\geqslant0\}$ 为参数是 $\lambda(0<\lambda<1)$ 的 Bernoulli 过程，如果它满足下列三个条件：1) $N(0)=0$，2) $\{N(m),m\geqslant0\}$ 具有独立增量性，3) $P\{N(n+m)-N(m)=k\}=C_n^k\lambda^k\bar{\lambda}^{n-k}$，$k=0,1,\cdots,n$，$\bar{\lambda}=1-\lambda$，$m,n$ 均为非负整数。

引理 1 设 $\{T_i,i\geqslant1\}$ 为输入过程 $\{N(n),n\geqslant0\}$ 的间隔时间序列，且 $\{T_i,i\geqslant1\}$ 相互独立同服从参数为 λ 的几何分布序列，则对整数 $0\leqslant n_i<n_{i+1}$ 和 $0\leqslant k_i\leqslant k_{i+1}\leqslant n_{i+1}$，$i=1,2,\cdots,m$，有

---

* 收文日期 1994-06-11

$$P\{N(n_1)=k_1,N(n_2)=k_2,\cdots,N(n_m)=k_m\}$$
$$=C_{n_1}^{k_1}\lambda^{k_1}\bar{\lambda}^{n_1-k_1}\prod_{i=2}^{m}C_{n_i-1-n_i}^{k_{i+1}-k_i}\lambda^{k_{i+1}-k_i}(1-\lambda)^{n_{i+1}-n_i-(k_{i+1}-k_i)} \tag{1}$$

证明　当 $m=1$ 时。因为 $\{N(n_1)\geqslant k_1\}=\{\tau_{k_1}\leqslant n_1\}$，其中 $\tau_{k_1}=\sum_{i=1}^{k_1}T_i$ 为第 k_1 个顾客到达的时刻，所以

$$P\{N(n_1)=k_1\}=P\{N(n_1)\geqslant k_1\}-P\{N(n_1)\geqslant k_1+1\}$$
$$=P\{\tau_{k_1}\leqslant n_1\}-P\{\tau_{k_1+1}\leqslant n_1\}=\sum_{j=k_1}^{n_1}C_{j-1}^{k_1-1}\lambda^{k_1}(1-\lambda)^{j-k_1}-\sum_{j=k_1+1}^{n_1}C_{j-1}^{k_1}\lambda^{k_1+1}\bar{\lambda}^{j-k_1-1}$$
$$=C_{n_1}^{k_1}\lambda^{k_1}\bar{\lambda}^{n_1-k_1},\qquad k_1=0,1,\cdots,n_1$$

假设 $m=t-1$ 时(1)式成立，由全概率公式，得

$$P\{N(n_1)=k_1,N(n_2)=k_2,\cdots,N(n_t)=k_t\}$$
$$=P\{\tau_{k_1}\leqslant n_1,\tau_{k_1+1}>n_1,\tau_{k_2}\leqslant n_2,\tau_{k_2+1}>n_2,\cdots,\tau_{k_t}\leqslant n_t,\tau_{k_t+1}>n_t\}$$
$$=\sum_{i=1}^{n_1}P\{T_{k_1+1}>n_1-i,T_{k_1+1}+\cdots+T_{k_2}\leqslant n_2-i,T_{k_1+1}+\cdots+T_{k_2+1}>n_2-i,\cdots,$$
$$T_{k_1+1}+\cdots+T_{k_t}\leqslant n_t-i,T_{k_1+1}+\cdots+T_{k_t+1}>n_t-i\}\cdot P\{\tau_{k_1}=i\}$$
$$=\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=n_1-i+1}^{n_2-i}P\{T_{k_1+2}+\cdots+T_{k_2}\leqslant n_2-i-j,T_{k_1+2}+\cdots+T_{k_2+1}>n_2-i-j,\cdots$$
$$T_{k_1+2}+\cdots+T_{k_t}\leqslant n_t-i-j,T_{k_1+2}+\cdots+T_{k_t+1}>n_t-i-j\}P\{\tau_{k_1}=i\}P\{T_{k_1+1}=j\}$$
$$=\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=n_1-i+1}^{n_2-i}P\{\tau_{k_2-k_1-1}\leqslant n_2-i-j,\tau_{k_2-k_1}>n_2-i-j,\cdots,$$
$$\tau_{k_t-k_1-1}\leqslant n_t-i-j,\tau_{k_t-k_1}>n_t-i-j\}P\{\tau_{k_1}=i\}P\{T_{k_1+1}=j\}$$
$$=\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=n_1-i+1}^{n_2-i}P\{N(n_2-i-j)=k_2-k_1-1,\cdots,$$
$$N(n_t-i-j)=k_t-k_1-1\}P\{\tau_{k_1}=i\}P\{T_{k_1+1}=j\}$$
$$=\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=n_1-i+1}^{n_2-i}C_{n_2-i-j}^{k_2-k_1-1}\lambda^{k_2-k_1-1}\bar{\lambda}^{n_2-i-j-k_2+k_1+1}\cdot$$
$$\prod_{r=3}^{t}C_{n_r-n_{r-1}}^{k_r-k_{r-1}}\lambda^{k_r-k_{r-1}}\bar{\lambda}^{n_r-n_{r-1}-(k_r-k_{r-1})}\cdot C_{i-1}^{k_1-1}\lambda^{k_1}\bar{\lambda}^{i-k_1}\lambda\bar{\lambda}^{j-1}$$
$$=\prod_{r=3}^{t}C_{n_r-n_{r-1}}^{k_r-k_{r-1}}\lambda^{k_r-k_{r-1}}\bar{\lambda}^{n_r-n_{r-1}-(k_r-k_{r-1})}\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=n_1-i+1}^{n_2-i}C_{n_2-i-j}^{k_2-k_1-1}C_{i-1}^{k_1-1}\lambda^{k_2}\bar{\lambda}^{n_2-k_2}$$
$$=\prod_{r=3}^{t}C_{n_r-n_{r-1}}^{k_r-k_{r-1}}\lambda^{k_r-k_{r-1}}\bar{\lambda}^{n_r-n_{r-1}-(k_r-k_{r-1})}C_{n_1}^{k_1}C_{n_2-n_1}^{k_2-k_1}\lambda^{k_2}\bar{\lambda}^{n_2-k_2}$$
$$=C_{n_1}^{k_1}\lambda^{k_1}\bar{\lambda}^{n_1-k_1}\prod_{r=2}^{t}C_{n_r-n_{r-1}}^{k_r-k_{r-1}}\lambda^{k_r-k_{r-1}}\bar{\lambda}^{n_r-n_{r-1}-(k_r-k_{r-1})}$$

此示 $m=t$ 时(1)式也成立,由数学归纳法,引理 1 得证。

引理 2 设 $\{T_i,i\geqslant 1\}$ 为输入过程 $\{N(n),n\geqslant 0\}$ 的间隔时间序列,且 $\{T_i,i\geqslant 1\}$ 为独立同分布序列,则 $P\{T_i=k\}=\bar{\lambda}^{k-1}\lambda,k=1,2,\cdots,0<\lambda<1$ 的充要条件是 $\{N(n),n\geqslant 0\}$ 为参数是 λ 的 Bernoulli 过程。

证明 必要性,由引理 1 知对任意非负整数 n,有

$$P\{N(n)=k\}=C_n^k\lambda^k\bar{\lambda}^{n-k},k=0,1,2,\cdots,n$$

所以,$P\{N(0)>0\}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}P\{N(0)=k\}=0$,从而 $P\{N(0)=0\}=1$,即 $N(0)=0$。

对任意整数 $n_1,n_2\geqslant 0$ 与 $n_2\geqslant k\geqslant 0$,由引理 1,得

$$\begin{aligned}P\{N(n_1+n_2)-N(n_1)=k\}&=\sum_{i=0}^{n_1}P\{N(n_1+n_2)=k+i,N(n_1)=i\}\\&=\sum_{i=0}^{n_1}C_{n_1}^i\lambda^i\bar{\lambda}^{n_1-i}\cdot C_{n_2}^k\lambda^k\bar{\lambda}^{n_2-k}=C_{n_2}^k\lambda^k\bar{\lambda}^{n_2-k},\qquad k=0,1,\cdots,n_2\end{aligned}$$

又对任意 m 个整数 $n_m>n_{m-1}>\cdots n_1>n_0=0$,以及满足 $\sum\limits_{i=1}^{n_j}k_i\leqslant n_j,j=1,2,\cdots,m$ 的非负整数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,由引理 1,有

$$\begin{aligned}&P\{N(n_1)-N(n_0)=k_1,\quad N(n_2)-N(n_1)=k_2,\cdots,N(n_m)-N(n_{m-1})=k_m\}\\&=P\{N(n_1)=k_1,\quad N(n_2)=k_1+k_2,\cdots,N(n_m)=\sum_{i=1}^{m}k_i\}\\&=C_{n_1}^{k_1}\lambda^{k_1}\bar{\lambda}^{n_1-k_1}\prod_{i=2}^{m}C_{n_i-n_{i-1}}^{k_i}\lambda^{k_i}\bar{\lambda}^{n_i-n_{i-1}-k_i}=\prod_{i=1}^{m}P\{N(n_i)-N(n_{i-1})=k_i\}\end{aligned}$$

此示 $\{N(n),n\geqslant 0\}$ 具有独立增量性,由定义 1 必要性得证。

充分性 因为

$$\begin{aligned}P\{T_1=k\}&=P\{N(k-1)=0,N(k)-N(k-1)=1\}\\&=C_{k-1}^0\lambda^0\bar{\lambda}^{k-1}\cdot C_1^1\lambda^1\bar{\lambda}^0=\lambda\bar{\lambda}^{k-1},\quad k=1,2,\cdots\end{aligned}$$

又对任意正整数 k_1,k_2,由定义 1,有

$$\begin{aligned}&P\{T_2=k_2|T_1=k_1\}=P\{T_2=k_2,T_1=k_1\}\ /\ P\{T_1=k_1\}\\&=P\{N(k_1-1)=0,N(k_1)-N(k_1-1)=1,N(k_2+k_1-1)-N(k_1)=0,\\&\quad N(k_2+k_1)-N(k_2+k_1-1)=1\}\ /\ P\{T_1=k_1\}\\&=\lambda\bar{\lambda}^{k_2-1},\qquad k_1=1,2,\cdots\end{aligned}$$

此示 T_2 与 T_1 独立且 T_2 也服从参数为 λ 的几何分布。同理可证 $T_1,T_2,T_3,\cdots$ 相互独立均服从参数为 λ 的几何分布,于是充分性得证。

引理 3 排队系统 $Geo/G/1$ 的忙期 B 的 $L-S$ 变换为

$$\tilde{B}(s)=\sum_{k=0}^{\infty}[\bar{\lambda}+\lambda\tilde{B}(s)]^k\int_k^{k+1}e^{-sx}\mathrm{d}F_V(x)\tag{2}$$

且
$$E(B)=\frac{1}{\mu}\cdot\frac{1}{1-\lambda\sum_{k=0}^{\infty}k\int_{k}^{k+1}\mathrm{d}F_V(x)},\qquad \lambda<\mu \tag{3}$$
其中 $F_V(x)$ 为服务时间 V 的分布函数。V 为连续型机变量或正整值随机变量，λ 为无记忆的几何到达间隔时间参数。$\mu=\frac{1}{E(V)}$.

证明　因为 $B=V+B_1+\cdots+B_{N(V)}$　　(4)

其中 $\{N(n),n\geqslant 0\}$ 为输入过程，由引理 2 知它为参数是 λ 的 Bemoulli 过程，又因它与服务时间独立，且 $B_1,B_2,B_3,\cdots$ 为相互独立均与 B 同分布的随机变量，所以

$$\begin{aligned}\tilde{B}(s)&=E(e^{-sB})=E\{e^{-s[V+B_1+\cdots+B_{N(V)}]}\}\\&=\int_0^{\infty}E\{e^{-s[x+B_1+\cdots+B_{N(x)}]}\}\mathrm{d}F_V(x)\\&=\int_0^{\infty}e^{-sx}E\{e^{-s[B_1+\cdots+B_{N(x)}]}\}\mathrm{d}F_V(x)\end{aligned}$$

而
$$\begin{aligned}E\{e^{-s[B_1+\cdots+B_{N(x)}]}\}&=\sum_{n=0}^{[x]}E[e^{-s(B_1+\cdots+B_n)}]P\{N(x)=n\}\\&=\sum_{n=0}^{[x]}[\tilde{B}(s)]^n\cdot C_{[x]}^n\lambda^n(1-\lambda)^{[x]-n}=[\bar{\lambda}+\lambda\tilde{B}(s)]^{[x]}\end{aligned}$$

故
$$\begin{aligned}\tilde{B}(s)&=\int_0^{\infty}e^{-sx}[\bar{\lambda}+\lambda\tilde{B}(s)]^{[x]}\mathrm{d}F_V(x)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{k\leqslant x<k+1}e^{-sx}[\bar{\lambda}+\lambda\tilde{B}(s)]^{[x]}\mathrm{d}F_V(x)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}[\bar{\lambda}+\lambda\tilde{B}(s)]^k\int_k^{k+1}e^{-sx}\mathrm{d}F_V(x)\end{aligned}$$

由 (4) 式，
$$E(B)=E(V)+E[B_1+\cdots+B_{N(V)}]=\frac{1}{\mu}+E(B)E[N(V)]$$

又
$$\begin{aligned}E(N(V)]&=\int_0^{\infty}E[N(x)]\mathrm{d}F_V(x)=\int_0^{\infty}\lambda[x]\mathrm{d}F_V(x)\\&=\lambda\sum_{k=0}^{\infty}k\int_k^{k+1}\mathrm{d}F_V(x)=\lambda\sum_{k=0}^{\infty}k[F_V(k+1)-F_V(k)]\end{aligned}$$

将此代入上式可得(3) 式。

推论　设排队系统 $Geo/I/1$ 除服务时间 V 是正整值随机变量外，其他假设与排队系统

$Geo/G/1$ 相同，则其忙期 B 的概率母函数（$P.g.f$）为

$$B(Z)=V[\bar{\lambda}Z+\lambda ZB(Z)] \tag{5}$$

且

$$E(B)=\frac{1}{\mu-\lambda},\quad D(B)=\frac{\sigma^2\mu^3+\lambda\bar{\lambda}}{(\mu-\lambda)^3},\quad \lambda<\mu \tag{6}$$

其中 $V(Z)$ 为 V 的 $p.g.f$，$\mu=\frac{1}{E(V)}$，$\sigma^2=D(V)$

引理 4 排队系统 $Geo/M/1$ 的忙期 B 的 $L-S$ 变换为

$$\tilde{B}(s)=\frac{\mu[1-e^{-(s+\mu)}]}{(s+\mu)\{1-e^{-(s+\mu)}[\bar{\lambda}+\lambda\tilde{B}(s)]\}}=\frac{\tilde{V}(s)[1-e^{-(s+\mu)}]}{1-e^{-(s+\mu)}[\bar{\lambda}+\lambda\tilde{B}(s)]} \tag{7}$$

且

$$E(B)=\frac{1-e^{-\mu}}{\mu(1-e^{-\mu}-\lambda e^{-\mu})},\qquad \lambda<\mu \tag{8}$$

$$D(B)=\frac{(1+2\mu)(1-e^{-\mu})^2+2\lambda e^{-\mu}(\mu+e^{-\mu}-1)}{\mu^2(1-e^{-\mu}-\lambda e^{-\mu})^2},\qquad \lambda<\mu \tag{9}$$

证明 由引理 3 和 $\tilde{V}(s)=\frac{\mu}{s+\mu}$ 立得(7) 式，由(7) 可得(8).

2 主要结果

定理 1 设 A_k 为排队系统 $Geo/M/n$ 的 $k(k\geqslant 0)$ 阶忙期，则 A_k 的 $L-S$ 变换为

$$\tilde{A}_k(s)=[\tilde{A}_0(s)]^{k+1},\quad \tilde{A}_0(s)=\frac{\mu[1-e^{-(s+\mu)}]}{(s+\mu)[1-e^{-(s+\mu)}[\bar{\lambda}+\lambda\tilde{A}_0(s)]]} \tag{10}$$

且

$$E(A_k)=\frac{(k+1)(1-e^{-\mu})}{\mu(1-e^{-\mu}-\lambda e^{-\mu})},\qquad \lambda<\mu,k\geqslant 0 \tag{11}$$

$$D(A_k)=\frac{(k+1)[(1+2\mu)(1-e^{-\mu})^2+2\lambda e^{-\mu}(\mu+e^{-\mu}-1)]}{\mu^2(1-e^{-\mu}-\lambda e^{-\mu})^2},\qquad \lambda<\mu,k\geqslant 0 \tag{12}$$

其中 $\mu=\sum_{i=1}^{n}\mu_i$，μ_i 为第 i 个服务台负指数服务时间参数。

证明 由引理 4 与[2] 中的方法立得。

参 考 文 献

1 徐光辉. 随机服务系统 $GI/M/n$ 的 k 阶忙期. 中国科学，1977，1：60～68

2 孙荣恒. 关于随机服务系统 k 阶忙期的一个注记. 重庆大学学报，1993，16(3)：112～115