1995 年 9 月　　重庆大学学报 （自然科学版）　　Vol. 18, №. 5
第 18 卷第 5 期　　Journal of Chongqing University (Natural Science Edition)　　Sep. 1995

(15)
90-94

线图连通度的界*

O157.5

The Bounds for the Connectivity of Line Graphs

何中市　　杨晓帆
He Zhongshi　　Yang Xiaofan
（重庆大学系统工程及应用数学系，计算机研究所，重庆，630044）

A

摘　要　首先给出了线图连通度 κ_L 的一个上界：$\kappa_L \leqslant \delta + \triangle - 2$；其次得出了在条件 $\delta \geqslant \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ 下 κ_L 的一个很好的下界：$\kappa_L \geqslant 2\delta - 2$；由此得到当 $\delta \geqslant \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ 时，若 G 为正则图，则 $\kappa_L = 2\delta - 2$，若 G 为拟正则图，则 $\kappa_L = 2\delta - 2$ 或 $2\delta - 1$.

关键词　界；图连通性／线图　图论，
中国图书资料分类法分类号　O157.5；O157.6

ABSTRACT　An upper bound and lower bounds for the connectivity of the line graph $L(G)$ are determined. The upper bound is presented as $\kappa_L \leqslant \delta + \triangle - 2$ in general, and an advanced lower bound is carried out in the form $\kappa_L \geqslant 2\delta - 2$ when $\delta \geqslant \left[\frac{n}{2}\right] + 1$. Some other results are given, especially, if $\delta \geqslant \left[\frac{n}{2}\right] + 1$, then $\kappa_L = 2\delta - 2$ over the regular graph and $\kappa_L = 2\delta - 2$ or $2\delta - 1$ over the quasi-regular graph.

KEYWORDS　bound; connectivity of graph / line graph

0　引　言

对于顶点集为 V、边集为 E 的简单图 $G(V,E)$（简记为 G），其线图记为 $L(G)$；$L(G)$ 也是一个简单图，其顶点集为 G 的边集，两个顶点 e_1、e_2 在 $L(G)$ 中相邻当且仅当两条边 e_1、e_2 在 G 中有一个公共端点[1]. 关于 G 和 $L(G)$，本文将用到如下记号。

$n = n(G)$ 表示图 G 的顶点数，$N_G(v)$ 表示 G 中顶点 v 的邻接顶点集，$d_G(v) = |N_G(v)|$ 表示 G 中顶点 v 的度，并记 $\delta = \delta(G)$、$\triangle = \triangle(G)$ 分别表示图 G 的顶点最小度和顶点最大度，即

$$\delta = \delta(G) = \min_{v \in V}\{d_G(v)\} \tag{1}$$

$$\triangle = \triangle(G) = \max_{v \in V}\{d_G(v)\} \tag{2}$$

记 $\lambda = \lambda(G)$ 和 $\kappa = \kappa(G)$ 分别表示 G 的边连通度和点连通度，则有[1]

$$\kappa(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta(G) \tag{3}$$

* 收文日期　1994-07-19
国家自然科学基金资助项目

关于 G 的线图 $L(G)$，其顶点 $e=uv$ 的度记为 $d_L(e)=d_L(uv)$，则

$$d_L(e)=d_L(uv)=d_G(u)+d_G(v)-2 \tag{4}$$

并以 $\delta_L=\delta(L(G))$ 表示 $L(G)$ 的顶点最小度，则

$$\delta_L=\min_{uv\in E(G)}\{d_L(uv)\}=\min_{uv\in E(G)}\{d_G(u)+d_G(v)-2\} \tag{5}$$

记 $\lambda_L=\lambda(L(G))$ 和 $\kappa_L=\kappa(L(G))$ 分别表示 $L(G)$ 的边连通度和点连通度。

关于 λ_L、κ_L 的下界，文献[2] 给出了如下引理：

引理 A[2]　若 $\lambda\geqslant 4$，则　$\lambda_L\geqslant 2\delta-2$.

引理 B[2]　若 $\lambda\geqslant 2$，则　$\kappa_L\geqslant\lambda$.

引理 A 给出了 λ_L 的一个良好下界；而引理 B 仅给出了 κ_L 的一个很一般的下界，这远远不能满足其在计算机网络容错性分析与设计中的应用[3,4].

本文对一般情形给出了 κ_L 的一个上界：$\kappa_L\leqslant\delta+\Delta-2$，同时证明了在 $\delta\geqslant\left[\frac{n}{2}\right]+1$ 的条件下，$\kappa_L\geqslant 2\delta-2$ 成立，从而得到了 κ_L 的一个很好的下界及若干推论。

1　主要结果

关于 κ_L 的界，得到如下结果：

定理 1　若 $\delta>0$，则线图 $L(G)$ 的连通度 κ_L 满足

$$\kappa_L\leqslant\delta+\Delta-2$$

定理 2　若 $\delta\geqslant\left[\frac{n}{2}\right]+1$，则

$$\kappa_L\geqslant 2\delta-2$$

结合引理 B 和定理 1 即得推论 1.

推论 1　若 $\lambda\geqslant 2$，则

$$\lambda\leqslant\kappa_L\leqslant\delta+\Delta-2$$

由于 $\lambda\leqslant\delta\leqslant\Delta$ 成立，故 κ_L 的上界与下界的差距($\delta+\Delta-2-\lambda\geqslant\Delta-2$) 较大。

推论 2　若 $\lambda\geqslant\left[\frac{n}{2}\right]+1$，则

$$2\delta-2\leqslant\kappa_L\leqslant(2\delta-2)+(\Delta-\delta)$$

证　因 $\lambda\leqslant\delta$，由已知 $\lambda\geqslant\left[\frac{n}{2}\right]+1$ 得 $\delta\geqslant\left[\frac{n}{2}\right]+1$，再由定理 2 即得

$$\kappa_L\geqslant 2\delta-2$$

又由定理 1 有

$$\kappa_L\leqslant\delta+\Delta-2=(2\delta-2)+(\Delta-\delta)$$

从而推论 2 得证。

只要 $n\geqslant 2$，则由 $\lambda\geqslant\left[\frac{n}{2}\right]+1$ 知 $\delta\geqslant\lambda\geqslant 2$，故

$$(2\delta-2)-\lambda=(\delta-\lambda)+(\delta-2)\geqslant\delta-2\geqslant 0$$

从而，当 $\lambda\geqslant\left[\frac{n}{2}\right]+1$ 时，推论 2 给出了比推论 1 更好的下界，且其上下界的差距减少为 $\Delta-\delta$.

再由 $\lambda_L\geqslant\kappa_L$，知当 $\lambda\geqslant\left[\frac{n}{2}\right]+1$ 时有：$\lambda_L\geqslant\kappa_L\geqslant 2\delta-2$，即 $\lambda_L\geqslant 2\delta-2$，此即为文献[2]

给出的引理A的结论，故在$\lambda \geqslant \left[\frac{n}{2}\right]+1$的条件下，引理$A$的结论正好是推论2的一个推论。

若G为正则图或拟正则图，则有推论3

推论3　当$\delta \geqslant \left[\frac{n}{2}\right]+1$时：

(1) 若G为正则图，则　$\kappa_L = 2\delta - 2$；

(2) 若G为拟正则图，则　$\kappa_L = 2\delta - 2$ 或 $2\delta - 1$.

证　由于G为简单图，且$\delta \geqslant \left[\frac{n}{2}\right]+1$，故[1]

$$\lambda = \delta \geqslant \left[\frac{n}{2}\right]+1$$

由推论2有

$$2\delta - 2 \leqslant \kappa_L \leqslant (2\delta - 2) + (\Delta - \delta) \tag{6}$$

(1) 若G为正则图，则$\triangle = \delta$，由(6)式即得

$$\kappa_L = 2\delta - 2$$

(2) 若G为拟正则图，则$\triangle - \delta = 1$，由(6)式得

$$2\delta - 2 \leqslant \kappa_L \leqslant 2\delta - 1$$

亦即　$\kappa_L = 2\delta - 2$　或　$2\delta - 1$.

2　两个预备定理

为了证明定理2，需要先证明如下两个预备定理。

定理3　对图$G(V,E)$，设$n = |V| \geqslant 4$. 若对于顶点集V的任意划分：$V = S \cup T$，$S \cap T = \Phi$，且$|S| \geqslant 2$，$|T| \geqslant 2$，均有$e(S,T) \geqslant e_0$（e_0为非负整数），则

$$\kappa_L \geqslant e_0$$

其中$e(S,T)$表示G的一个端点在S中，另一个端点在T中的边数，亦即G中跨接S和T的边数。

证　欲证$\kappa_L \geqslant e_0$，只须证$L(G)$不存在$k < e_0$的k-点割集，用反证法。

假设$L(G)$存在$k < e_0$的k-点割集，即$L(G)$存在$V_L \subseteq V(L(G))$：$|V_L| = k < e_0$，使$L(G) - V_L$点不连通或为孤立点。

由G与$L(G)$的关系知，$L(G)$的顶点即为G的边，故，相应地得到：

在G中，存在$E' \subseteq E(G)$：$|E'| = k < e_0$，使$G - E'$边不连通或只含一条孤立边。

1) 若$G - E'$只含一条孤立边，则设此边为uv，可知G中与uv相关联的边全包含在E'中，于是$d_L(uv) \leqslant |E'|$

令$S = \{u,v\}$，　$T = T\backslash S$，则

$$e(S,T) \leqslant d_L(uv) \leqslant |E'| = k < e_0$$

亦即$e(S,T) < e_0$，

而S，T是V的一个划分，且$|S| = 2$，$|T| = |V| - |S| = n - |S| \geqslant 4 - 2 = 2$，由已知$e(S,T) \geqslant e_0$，导致矛盾。

2) 若$G - E'$边不连通，即$G - E'$至少含有两条边e_1、e_2，且e_1、e_2分别包含在$G - E'$的两个不同的连通分图G_{e_1}、G_{e_2}中，则图$G - E'$可划分成顶点和边都不相交的两部分：

$$G - E' = G_1 \cup G_2$$

其中　$G_1 = G_{e_1}, G_2 = (G - E') - G_1 = G - E' - G_{e_1} \supseteq G_{e_2}$

因此，在 $G - E'$ 中，G_1，G_2 之间无跨接边。

令 $S = V(G_1)$，$T = V(G) \backslash S = V(G - E') \backslash V(G_1) = V(G_2)$. 则 S、T 是顶点集 V 的一个划分，且 $|S| \geqslant 2$，$|T| \geqslant 2$ 成立，由已知有 $\varepsilon(S,T) \geqslant \varepsilon_0$.

但是，在 $G - E'$ 中，因 G_1 与 G_2 之间无跨接边，从而 S 与 T 之间无跨接边。故 G 中 S 与 T 之间的跨接边全包含于 E' 中，即有

$$\varepsilon(S,T) \leqslant |E'| = k < \varepsilon_0$$

亦即 $\varepsilon(S,T) < \varepsilon_0$，导致矛盾。

综上，定理 3 得证。

定理 4　若 $\delta \geqslant \left[\frac{n}{2}\right] + 1$，$n \geqslant 4$，则对于 G 的顶点集 V 的任意划分：$V = S \cup T$，$S \cap T = \Phi$，且 $|S| \geqslant 2$，$|T| \geqslant 2$，均有 $\varepsilon(S,T) \geqslant 2\delta - 2$

证　设 S、T 为顶点集 V 的任一划分：

$$S \cup T = V, S \cap T = \Phi, \text{且 } |S| \geqslant 2, |T| \geqslant 2$$

则有 $|S| + |T| = |V| = n$，因此 $|S|$，$|T|$ 二者之一必不超过 $\left[\frac{n}{2}\right]$. 不失一般性，设 $|S| \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$，现考察从 S 到 T 的边数 $\varepsilon(S,T)$，如右图。(若 $|S| > \left[\frac{n}{2}\right]$，则 $|T| \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$，则考察 $\varepsilon(T,S)$，利用 G 为无向图有 $\varepsilon(S,T) = \varepsilon(T,S)$ 及 S、T 的对称性，同理可证明结论成立)。

图 $G(V,E)$；$V = S \cup T$

设 $|S| = x$，则　$2 \leqslant x \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$

因 $V(G) = V = S \cup T$，故 $\forall v \in S$，有

$$N_G(v) = N_S(v) \cup N_T(v)$$

其中 $N_S(v)$、$N_T(v)$ 分别表示顶点 v 在顶点集 V、S 中的邻接集，由 $S \cap T = \Phi$ 有

$$N_S(v) \cap N_T(v) = \Phi$$

从而　$$|N_G(v)| = |N_S(v)| + |N_T(v)|$$

即　$$|N_T(v)| = |N_G(v)| - |N_S(v)|$$

由 $\delta = \delta(G)$ 及 $|N_G(v)| = \mathrm{d}_G(v) \geqslant \delta(G)$ 有 $|N_G(v)| \geqslant \delta$，又 G 为简单图，且 $v \in S$，故

$$|N_S(v)| \leqslant |S| - 1 = x - 1$$

因此　$$|N_T(v)| \geqslant \delta - (x - 1)$$

而 $|N_T(v)|$ 即为 S 中顶点 v 在 T 中的邻接点的个数，亦即一个端点为 v，另一个端点在 T 中的边数，可知 $\varepsilon(S,T)$ 就是所有这些一个端点在 S 中，另一个端点在 T 中的边的总数，因此有：

$$\varepsilon(S,T) = \sum_{v \in S} |N_T(v)| \geqslant \sum_{v \in S} [\delta - (x - 1)]$$

$$= |S| \cdot [\delta - (x - 1)] = x \cdot [\delta - (x - 1)]$$

亦即　$\varepsilon(S,T) \geqslant x[\delta - (x - 1)]$，由此有

$$\varepsilon(S,T) - (2\delta - 2) \geqslant x[\delta - (x - 1)] - (2\delta - 2)$$

$$=(x-2)[(\delta-1)-x]$$

由已知 $\delta \geqslant \left[\frac{n}{2}\right]+1$ 即 $\delta-1 \geqslant \left[\frac{n}{2}\right]$,

又 $2 \leqslant x \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$,故 $x-2 \geqslant 0$, $(\delta-1)-x \geqslant \left[\frac{n}{2}\right]-x \geqslant 0$,

从而得 $\varepsilon(S,T)-(2\delta-2) \geqslant 0$,即 $\varepsilon(S,T) \geqslant 2\delta-2$.

3 定理 1 和定理 2 的证明

3.1 定理 1 的证明

对图 G,因 $\delta > 0$,故存在 $u_0 \in V$,使

$$d_G(u_0)=\delta > 0$$

即存在 $v_0 \in V$,使 $u_0v_0 \in E$,由(1)式、(2)式及(4)、(5)式得

$$\begin{aligned}\delta_L &\leqslant d_L(u_0v_0)=d_G(u_0)+d_G(v_0)-2\\ &\leqslant \delta+\triangle-2,\end{aligned}$$

即 $\delta_L \leqslant \delta+\triangle-2$,

另一方面,由(3)式知 $\kappa_L=\kappa(L(G)) \leqslant \delta(L(G))=\delta_L$。即 $\kappa_L \leqslant \delta_L$.

从而得

$$\kappa_L \leqslant \delta+\triangle-2$$

3.2 定理 2 的证明

由 $\delta \geqslant \left[\frac{n}{2}\right]+1$ 及 G 为简单图知 $n \geqslant 3$

1) 当 $n=3$ 时:

由 $\delta \geqslant \left[\frac{n}{2}\right]+1$ 及 G 为简单图知

$$G=K_3,\quad \delta=\delta(G)=2$$

其中 K_3 表示 3 阶完全图。显然 $L(G)=L(K_3)=K_3$. 从而 $\kappa_L=\kappa(L(G))=\kappa(K_3)=3-1=2=2\times2-2=2\delta-2$.

故有 $\kappa_L \geqslant 2\delta-2$ 成立。

2) 当 $n \geqslant 4$ 时:

结合定理 3 及定理 4 即刻得到

$$\kappa_L \geqslant 2\delta-2$$

综上,定理 2 得证。

参 考 文 献

1 Harary F. Graph Theory. Addison-Wesley, Reading. 1969:43~56

2 Bauer D, Tindell R. The Connectivities of Line and Total Graphs. J. Graph Theory, John Wiley & Sons, New York, 1982,6,197~203

3 陈廷槐,康泰,姚荣. 超图的连通性及容错多总线系统的设计. 中国科学(A 辑). 北京:科学出版社, 1987,(12),1309~1319

4 何中市,杨晓帆,陈四清,陈廷槐. 多总线系统的最优总线容错性分析与设计. 重庆大学学报,重庆:重庆大学出版社,1995,18(1):1~5