0 8

# 参数多目标规划的最优多值函数的K-拟凸性*

# K-Quasiconvexity of Optimal Multifunctions in Parametric Multiobjective Programming

O221

李毛亲　Li Maoqin（太原师专数学系）
段虞荣　Duan Yurong（重庆大学系统工程及应用数学系）

A

**摘　要**　讨论了一般参数多目标规划问题的最优多值函的K-拟凸性及其它一些性质。

**关键词**　参数多目标规划；最优多值函数；K-拟凸性

**中国图书资料分类法分类号**　O221

**ABSTRACT**　The K-quasiconvexity and other properties of optimal multifunctons are considered for the general parametric multiobjective programming problems.

**KEYWORDS**　parametric multiobjective programming; optimal multifunction; K-quasiconvexity.

## 0 引　言

设 $X$ 和 $Y$ 均为实赋范线性空间，$D \subset Y$ 为点闭凸锥，$E^m$ 为 $m$ 维 Euclid 空间，$K \subset E^m$ 为点闭凸锥，且 $\text{int } D \neq \varnothing$，$\text{int } K \neq \varnothing$. 考虑一般参数多目标规划问题：

$$P(u): \quad \min_{x} f(x,u) \qquad \text{s.t. } x \in R(u)$$

其中 $\qquad f: S \times M \to E^m \qquad R: M \to 2^X \qquad S \subset X$

$M \subset Y$. 设 $F(u) = \{f(x,u) \mid x \in R(u)\}$，$f(x,u) \in F(u)$ 称为 $P(u)$ 的有效解的象，若有 $f(x',u) \in F(u)$ 使 $f(x,u) \in f(x',u) + K$，则 $f(x',u) = f(x,u)$. $P(u)$ 的有效解的象全体构成最优多值集函数 $H^*(u) = E[F(u) \mid K] = E[F(u)]$.

常见的多目标最优化问题还有

$P_1(u)$:　$\min_{x}$　s.t.　$G(x,u) \in D \quad H(x,u) = 0, x \in S, u \in M$. 其中 $G: S \times M \to Y$，$H: S \times M \to E^2$，关于 $P_1(u)$ 有：$R_1(u) = \{x \in S \mid G(x,u) \in D, H(x,u) = 0\}$，$F_1(u) = \{f(x,u) \mid x \in R_1(u)\}$，$H_1^*(u) = E[F_1(u) \mid K]$.

$P_2(u)$:　$\min_{x} f(x,u)$　s.t.　$G(x) \in u + D \quad x \in S, u \in M$. 其中 $G: S \to Y$. 关于 $P_2(u)$

* 收文日期　1994-11-16

有：$R_2(u)=\{x\in S\mid G(x)\in u+D\}$，$F_2(u)=\{f(x,u)\mid x\in R_2(u)\}$，$H_2^*(u)=E[F_2(u)\mid K]$.

笔者将讨论这三类参数多目标规划问题最优多值函数 $H^*(u)$ 的 $K$-拟凸性及其它一些性质。为此先引入一些概念。

**定义 1**[1]　$f:S\to Y$，（其中 $S\subset X$ 为凸集）称为是 $D$-拟凸的，若 $x_1,x_2\in S$，且 $f(x_1)\in f(x_2)+D$，则对任意 $\lambda\in(0,1)$，$f(x_1)\in f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)+D$.

**定义 2**　$H:M\to 2^{2^m}$ 称为是 $K$-拟凸的，（其中 $M\subset Y$ 为凸集），若对 $u_1,u_2\in M$，$H(u_1)\subset H(u_2)+K$，则对任意 $\lambda\in(0,1)$，$H(u_1)\subset H(\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)+K$.

**定义 3**[2]　$f:S\to E^m$，$S\subset X$ 称为在 $x_0\in S$ 为 $K$-下半连续，若对 $f(x_0)$ 的任意邻域 $V$，存在 $x_0$ 的邻域 $U$，使 $f(U)\subset V+K$.

**定义 4**[3]　$S\subset Y$ 称为 $D$-有界集，若存在 $Y$ 的有界集 $M$，使 $S\subset M+D$；$S\subset Y$ 称为 $D$-紧集，若 $S$ 为 $D$-有界集且 $S+D$ 为闭集。

## 1　$H^*(u)$ 的一些性质

本节将讨论最优多值函数 $H^*(u)$ 在不同约束条件下的 $K$-拟凸性及其它一些性质。

**定义 5**　集值映射 $R:M\to 2^X$（其中 $M\subset Y$ 为凸集）称为在 $M$ 上是凸的，若对任意 $u_1,u_2\in M$，$\lambda\in(0,1)$，

$$\lambda R(u_1)+(1-\lambda)R(u_2)\subseteq R(\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)$$

**引理 3**　对 $P_1(u)$，若 $G(x,u)$ 是拟凹或 $D$-凹的，$H(x,u)$ 是拟线性的，则 $R_1(u)$ 在 $M$ 上是凸的。

**引理 4**　对 $P_2(u)$，若 $G(x)$ 是拟凹或 $D$-凹的，则 $R_2(u)$ 在 $M$ 上是凸的。

以下为方便计，在不致引起误解的情况下，记 $x_\lambda=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$，$u_\lambda=\lambda u_1+(1-\lambda)u_2$.

**命题 1**　对 $P(u)$，设 $f(x,u)$ 关于 $(x,u)$ 是 $K$-拟凸的，$R(u)$ 在凸集 $M$ 上是凸的，且对每一 $u\in M$，$F(u)\subset H^*(u)+K$，则 $H^*(u)$ 在 $M$ 上是 $K$-拟凸的。

**证**　设 $u_1,u_2\in M$，且 $H^*(u_1)\subset H^*(u_2)+K$，则 $\forall f(x_1,u_1)\in H^*(u_1)$，$\exists f(x_2,u_2)\in H^*(u_2)$，使 $f(x_1,u_1)\in f(x_2,u_2)+K$. 由 $f$ 的 $K$-拟凸性及假设知，$\forall\lambda\in(0,1)$.

$$f(x_1,u_1)\in f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)+K\subset H^*(u_\lambda)+K$$

其中由 $M$ 的凸性知 $u_\lambda\in M$，由 $R(u)$ 的凸性保证了 $x_\lambda\in R(u_\lambda)$. 再由 $f(x_1,u_1)$ 取法的任意性知：$H^*(u_1)\subset H^*(u_\lambda)+K$. ∴$H^*(u)$ 在 $M$ 上是 $K$-拟凸的。

**推论 1**　对 $P_1(u)$，设 $f(x,u)$ 关于 $(x,u)$ 是 $K$-拟凸的，$G(x,u)$ 是拟凹的或 $D$-凹的，$H(x,u)$ 是拟线性的，$M$ 和 $S$ 均为凸集，且对每一 $u\in M$，$F_1(u)\subset H_1^*(u)+K$，则 $H_1^*(u)$ 在 $M$ 上是 $K$-拟凸的。

**证**　由引理 3 及命题 1 可得结论。

**推论 2**　对 $P_2(u)$，设 $f(x,u)$ 关于 $(x,u)$ 是 $K$-拟凸的，$G(x)$ 是拟凹的或是 $D$-凹的，$M$ 和 $S$ 均为凸集，且对每一 $u\in M$，$F_2(u)\subset H_2^*(u)+K$，则 $H_2^*(u)$ 在 $M$ 上是 $K$-拟凸的。

**证**　由引理 4 及命题 1 可得结论。

**定义 6**[4]　集值映射 $R:M\to 2^X$ 称为本质凸，$M\subset Y$ 为凸集，若对任意 $u_1,u_2\in M$，$u_1\neq u_2$，$\lambda\in(0,1)$，　$\lambda R(u_1)+(1-\lambda)R(u_2)\subseteq R(\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)$

当定义中不限制 $u_1\neq u_2$ 时，即为定义 5，文献[4]指出确有本质凸而非凸的集值映射。

**命题 2** 对 $P(u)$，设 $f(x,u)$ 关于 $(x,u)$ 是 $K$- 拟凸的，$R$ 在凸集 $M$ 上是本质凸的，且对每一 $u\in M$，$F(u)\subset H^*(u)+K$，则 $H^*(u)$ 在 $M$ 上是 $K$- 拟凸的。

**证** 当 $u_1=u_2$ 时有 $H^*(u_1)\subset H^*(u_2)+K$，对任意 $\lambda\in(0,1)$，$u_\lambda=u_1=u_2$，$\therefore H^*(u_1)\subset H^*(u_\lambda)+K$.

当 $u_1\neq u_2$ 时，证明过程与命题 1 相同。

**定义 7** $f:S\to Y$ 称为在 $S$ 上是严格 $K$- 拟凸的，$S\subset X$ 为凸集，若对任意 $x_1,x_2\in S$，且 $f(x_1)\in f(x_2)-\text{int }K$，则对任意 $\lambda\in(0,1)$，$f(x_1)\in f(x_\lambda)+\text{int }K$.

**定义 8** $H:M\to 2^{Y}$ 称为在凸集 $M$ 上是严格 $K$- 拟凸的，若对任意 $u_1,u_2\in M\subset V$，且 $H(u_1)\subset H(u_2)+\text{int }K$，则对任意 $\lambda\in(0,1)$，$H(u_1)\subset H(u_\lambda)+\text{int }K$.

**命题 3** 对 $P(u)$，设 $f(x,u)$ 关于 $(x,u)$ 是严格 $K$- 拟凸的，$R$ 在 $M$ 上凸，$M$ 为凸集，且对每一 $u\in M$，$F(u)\subset H^*(u)+K$，则 $H^*(u)$ 在 $M$ 上是严格 $K$- 拟凸的。

**证** 设 $u_1,u_2\in M$ 且 $H^*(u_1)\subset H^*(u_2)+\text{int }K$，则对任意 $f(x_1,u_1)\in H^*(u_2)$，$\exists\ f(x_2,u_2)\in H^*(u_2)$，使 $f(x_1,u_1)\in f(x_2,u_2)+\text{int }K$，由 $f$ 的严格 $K$- 拟凸性及假设知，对任意 $\lambda\in(0,1)$，$f(x_1,u_1)\in f(x_\lambda,u_\lambda)+\text{int }K\subset H^*(u_\lambda)+K+\text{int }K\subseteq H^*(u_\lambda)+\text{int }K$. 由 $f(x_1,u_1)$ 取法的任意性知，$H^*(u)$ 在 $M$ 上是严格 $K$- 拟凸的。

**推论 3** 对 $P(u)$，设 $f(x,u)$ 关于 $(x,u)$ 是严格 $K$- 拟凸的，$G(x,u)$ 是 $D$ — 凹的，$M$ 和 $S$ 均为凸集，且对每一 $u\in M$，$F_1(u)\subset H_1^*(u)+K$，则 $H_1^*(u)$ 在 $M$ 上是严格 $K$- 拟凸的。

**推论 4** 对 $P_2(u)$，设 $f(x,u)$ 关于 $(x,u)$ 是严格 $K$- 拟凸的，$G(x)$ 是 $D$ — 凹的，$M$ 和 $S$ 均为凸集，且对每一 $u\in M$，$F_2(u)\subset H_2^*(u)+K$，则 $H_2^*(u)$ 在 $M$ 上是严格 $K$- 拟凸的。

**定义 9** 集值映射 $R:M\to 2^X$ 称为在凸集 $M(\subset Y)$ 上是包凸的，若对任意 $u_1,u_2\in M$，$\lambda\in(0,1)$：$\lambda R(u_1)+(1-\lambda)R(u_2)\subseteq\text{conv}(R(\lambda u_1+(1-\lambda)u_2))$

**命题 4** 对 $P(u)$，设 $f(x,u)$ 关于 $(x,u)$ 是 $K$- 拟凸的，对每个 $u\in M$，$f(x,u)$ 关于 $x$ 是拟凸的且 $F(u)\subset H^*(u)+K$，$R$ 在凸集 $M$ 上是包凸的，则 $H^*(u)$ 在 $M$ 上是 $K$- 拟凸的。

**证** 设 $\widetilde{R}(u)=\text{conv}(R(u))$，$\widetilde{F}(u)=\{f(x,u)|x\in\widetilde{R}(u)\}$，$\widetilde{H}^*(u)=E[\widetilde{F}(u)]$，首先证明 $H^*(u)=\widetilde{H}^*(u)$.

一方面 $\forall\ f(\tilde{x},u)\in\widetilde{H}^*(u)$，则 $\tilde{x}\in\widetilde{R}(u)$，$\therefore\exists\ x_1,x_2\in R(u)$，$\lambda\in[0,1]$，使 $\tilde{x}=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$. 由 $f(x,u)$ 关于 $x$ 的拟凹性知：

$f(\tilde{x},u)=f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,u)\geqslant\min\{f(x_1,u),f(x_2,u)\}$，$\therefore\exists\ x'\ (=x_1$ 或 $x_2)\in R(u)$ 使 $f(\tilde{x},u)\in f(x',u)+K$.

故 $f(x',u)=f(\tilde{x},u)$，而 $f(x',u)\in F(u)\subset\widetilde{F}(u)$，故 $f(x',u)=f(\tilde{x},u)\in H^*(u)$，故 $\widetilde{H}^*(u)\subseteq H^*(u)$.

另一方面，$\forall\ f(x,u)\in H^*(u)$，若有 $f(\tilde{x},u)\in\widetilde{F}(u)$ 使 $f(x,u)\in f(\tilde{x},u)+K$，则对 $\tilde{x}\in\widetilde{R}(u)$，$\exists\ x_1,x_2\in R(u)$，$\lambda\in[0,1]$，使 $\tilde{x}=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$，从而有 $f(\tilde{x},u)=f(x_\lambda,u)\geqslant\min\{f(x_1,u),f(x_2,u)\}=f(x',u)$，$x\in R(u)$，$\therefore f(x',u)\leqslant f(\tilde{x},u)\leqslant f(x,u)$，由 $f(x,u)\in H^*(u)$，$f(x',u)\in F(u)$ 知：

$$f(x',u)=f(\tilde{x},u)=f(x,u)\in\widetilde{H}^*(u),\qquad\therefore\widetilde{H}^*(u)=H^*(u)$$

由于 $\text{conv}(R(u))$ 在 $M$ 上是凸的，且 $\forall\ f(\tilde{x},u)\in\widetilde{F}(u)$，$\tilde{x}=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$，$x_1,x_2\in R(u)$，$\lambda\in[0,1]$，$f(\tilde{x},u)\geqslant\min\{f(x_1,u),f(x_2,u)\}=f(x',u)$，故 $f(\tilde{x},u)\in f(x',u)+K$，故 $\widetilde{F}(u)\subset F(u)+K\subseteq H^*(u)+K=\widetilde{H}^*(u)+K$，由命题 1 得 $H^*(u)$ 在 $M$ 上是 $K$- 拟凸的。

从命题4的证明过程可见，在证明 $\widetilde{H}^*(u)=H^*(u)$ 时，只用到了 $f(x,u)$ 关于 $x$ 的拟凹性（当 $u$ 固定时），而 $H^*(u)$ 的 $K$-拟凸性则完全是由 $\widetilde{H}^*(u)$ 的 $K$-拟凸性得到的。从而有下面的

**命题5**　对 $P(u)$，设 $f(x,u)$ 关于 $(x,u)$ 是严格 $K$-拟凸的，对每一 $u\in M$，$f(x,u)$ 关于 $x$ 是拟凹的，且 $F(u)\subset H^*(u)+K$，$R$ 在凸集 $M$ 上是包凸的，则 $H^*(u)$ 在 $M$ 上是严格 $K$-拟凸的。

**定义10**[4]　集值映射 $R:M\to 2^X$ 称为在凸集 $M\subset Y$ 上是闭凸的，若对任意 $u_1,u_2\in M$，$\lambda\in(0,1)$：

$$\lambda R(u_1)+(1-\lambda)R(u_2)\subseteq cl(R(\lambda u_1+(1-\lambda)u_2))$$

当 $R$ 为凸集时，则 $R$ 必是闭凸的，反之不然[4]。

**定义11**[2]　$f:S\to Y$ 称为在 $x_0\in S$ 为 $K$-上半连续，若对 $f(x_0)$ 在 $Y$ 中任意邻域 $V$，存在 $x_0$ 在 $S$ 中的邻域 $U$，使 $f(U)\subset V-K$。

**命题6**　设 $f(x,u)$ 对 $(x,u)$ 是 $K$-拟凸的，$R$ 在凸集 $M$ 上是闭凸的，对每个 $u\in M$，$f(x,u)$ 在 $cl(R(u))$ 上对 $x$ 是 $K$-上半连续，且 $F(u)\subset H^*(u)+K$，则 $H^*(u)$ 在 $M$ 上是 $K$-拟凸的。

**证**　设 $\overline{R}(u)=cl(R(u))$，$\overline{F}(u)=\{f(x,u)\mid x\in\overline{R}(u)\}$，$\overline{H}^*(u)=E[\overline{F}(u)]$，下面证明 $H^*(u)=\overline{H}^*(u)$。

一方面，$\because F(u)\subseteq\overline{F}(u)$，$\therefore H^*(u)\subseteq\overline{H}^*(u)+K$。

另一方面，$\forall f(\bar{x},u)\in\overline{H}^*(u)$，则 $\bar{x}\in\overline{R}(u)$，于是对 $f(\bar{x},u)$ 的任意邻域 $V$，存在 $\bar{x}$ 在 $\overline{R}(u)$ 中的邻域 $U$，使 $f(U)\subset V-K$，$\because\bar{x}\in\overline{R}(u)$，$\therefore U\cap R(u)=U_1\neq\varnothing$，故 $f(U_1)\subset V-K$，故 $E[V]\subset E[f(U_1)]+K\subset E[F(u)]+K$，因 $f(\bar{x},u)$ 是 $f$ 在 $\overline{R}(u)$ 上的总体有效点的象，从而也是其子集 $V$ 上的有效点的象，故 $f(\bar{x},u)\in E(V)$，即 $f(\bar{x},u)\in E[F(u)]+K=H^*(u)+K$，故 $\overline{H}^*(u)\subseteq H^*(u)+K$，由有效点之象的定义及上述结论知，$F(u)\subseteq\overline{F}(u)+K$，$\overline{F}(u)\subseteq F(u)+K$，故 $H^*(u)=\overline{H}^*(u)$。

又因 $\overline{R}(u)$ 在 $M$ 上是凸的，由命题1知 $\overline{H}^*(u)$ 在 $M$ 上是 $K$-拟凸的，即 $H^*(u)$ 在 $M$ 上是 $K$-拟凸的。类似于命题5，我们可得下面的

**命题7**　设 $f(x,u)$ 关于 $(x,u)$ 是严格 $K$-拟凸的，$R$ 在凸集 $M$ 上是闭凸的，对每个 $u\in M$，$f(x,u)$ 关于 $x$ 在 $cl(R(u))$ 上是 $K$-上半连续的，且 $F(u)\subset H^*(u)+K$，则 $H^*(u)$ 在 $M$ 上是 $K$-严格拟凸的。

## 2　结　　语

本文中所得到的在不同约束条件下最优多值函数 $H^*(u)$ 的 $K$-拟凸性及严格 $K$-拟凸性在参数多目标规划中都是一些新的结论，它属于参数多目标规划稳定性理论的范畴，它们将有助于参数多目标规划稳定性理论的进一步详细讨论。

## 参 考 文 献


1　John J, Sahs E. Generalized quasiconvex mappings and vector optimization. SIAM J. Control & Optim, 1986, 24(2): 306～322

2　Penot J, Sterna-Karwat A. Parametrized multicriteria optimization. continuity and closedness of optimal multifunctions. J. M. A. A. 1986, 120: 150～168

3　Luc D. T. On duality theory in multiobjective programming. J. O. T. A. 1984, 43(4): 557～582

4　Fiacco A. V., Kyparisis J. Convexity and concavity properties of the optimal value function in parametric nonlinear programming. J. O. T. A. 1980, 48(1): 95～126