13. 72-77

关于 $x_4^T(G)+x_4^T(\overline{G})$ 的可达下界问题*

On the Attainable Lower Bound of $x_4^T(G)+x_4^T(\overline{G})$

谢德政
Xie Dezheng
(重庆大学系统工程及应用数学系，重庆，630044)

O157.5

A 摘 要 解决了张忠辅等人提出的如下问题：确定 $x_4^T(G)+x_4^T(\overline{G})$ 的可达下界，其中 $x_4^T(G)$ 表图 G 的 4- 全色数，$\overline{G}$ 表 G 的补图。

关键词 4-边色数；4-色数；4-全色数；直径 图，下界，

中国图书资料分类法分类号 O157.9

ABSTRACT This paper has solved the open question proposed by Zhang Zhongfu and others in reference [1], which is to ascertain the attainable lower bound of $x_4^T(G)+x_4^T(\overline{G})$, in which $x_4^T(G)$ indicates the 4-total chromatic number of a graph G, while $\overline{G}$ indicates the complement graph of G.

KEYWORDS 4-edge chromatic number; 4-chromatic number; 4-total chromatic number; diameter

0 引 言

图的染色是图论研究的重要内容。在文[1]中，张忠辅等人由文[2]的图的 n- 色数的概念，引进了图的 n- 边色数，n- 全色数的概念。

定义 1[1] 对图 $G(V,E)$ 和自然数 n，使其长度不大于 n 的任意路上所有顶点(或所有边，或所有顶点和所有边)均染为不同色的最小数目，称为 G 的 n- 色数(或 n- 边色数，或 n- 全色数)，并简记为 $x_n(G)$(或 $x_n'(G)$，或 $x_n^T(G)$)。

文[1]讨论了 $n=4$ 和 $n\geqslant 5$ 时，$x_n^T(G)+x_n^T(\overline{G})$ 的上界和下界，得到如下结果：

(i) 对 p 阶图 G，有

$$\left\{\frac{p^2+4p+3}{4}\right\}\leqslant x_4^T(G)+x_4^T(\overline{G})\leqslant\frac{p(p+3)}{2}$$

其中 $\{X\}$ 表示小于 X 的最小整数。

(ii) 对 p 阶图 G 及 $n\geqslant 5$，则有

$$\left\{\frac{3p^2+10p-1}{8}\right\}\leqslant x_n^T(G)+x_n^T(\overline{G})\leqslant\frac{p(p+3)}{2}$$

且上界不可改进，下界当 $p\equiv 0(\mathrm{mod}2)$ 时不可改进。

---

* 收文日期 1995-01-06
现在重庆商学院基础部工作

文[1]提出了如下尚未解决的问题：确定 $x_4^T(G) + x_4^T(\overline{G})$ 的可达下界。笔者解决了此问题，即得以下定理。

定理 1　设 G 为有 p 个顶点的简单图，则有

$$\left\{\frac{3p^2 + 10p - 1}{8}\right\} \leqslant x_4^T(G) + x_4^T(\overline{G}) \tag{1}$$

且当 p 为偶数时，(1) 式不可改进。

本文用 $V(G)$ 和 $E(G)$（或 V 和 E）分别表示图 G 的顶点集和边集，用 p 或 $|V(G)|$ 表示图 G 的顶点数，用 q 或 $|E(G)|$ 表示图 G 的边数。图 G 有时也称为 (p,q) 一图，本文所涉及的图均为简单图，未加说明的术语和记号请参见[3].

定义 2[1]　对于图 G 和 $E' \subseteq E(G)$，如果在 E' 中任意两条边均在 G 的一条长不大于 4 的路 4 上，则称 E' 为 G 的 -边完全集。

1　几个引理和定理 1 的证明

引理 2.1（见[3]，p. 14，练习 1.6.12）　对图 G，若 $d(G) \geqslant 4$，则 $d(\overline{G}) \leqslant 2$，其中 $d(G)$ 表 G 的直径。

引理 2.2　设 G 为 (p,q) 一图，且 $d(G) \leqslant 2$，则

$$x_4^T(G) = p + q$$

此引理易证，略。

引理 2.3　设 G 为 (p,q) 一图，若 $d(\overline{G}) \leqslant 2$，则 (1) 式成立。

证　因为 $d(\overline{G}) \leqslant 2$，由文[1，引理 3.4]以及引理 2.2 得

$$x_4^T(G) + x_4^T(\overline{G}) \geqslant g(q) = \frac{(2q+p)q}{p^2} + \frac{2q}{p} + 1 + \frac{p(p-1)}{2} - q + p$$

据文[1，定理 3.2]的证明，同理得 (1) 式成立。

引理 2.4　设 G 为有 p 个顶点的图，且 $\delta(G) \geqslant \left[\frac{p}{2}\right]$，则 $d(G) \leqslant 2$. 其中 $[Y]$ 表示不大于 Y 的最大整数，$\delta(G)$ 表 G 的最小度。

此此理易证，略。

引理 2.5　设 G 为有 p 个顶点的图，且 $d(G) = d(\overline{G}) = 3$，则 (1) 式成立。

证　因 $d(G) = d(\overline{G}) = 3$，则有

$$x_4^T(G) = x_4^T(\overline{G}) = p \tag{2}$$

设 $V_1 = \{v \mid d_G(V) \geqslant \left[\frac{p}{2}\right], v \in V(G)\}$，$V_2 = V(G) \setminus V_1$；$\overline{V}_1 = \{\bar{v} \mid d_{\overline{G}}(\bar{v}) \geqslant \left[\frac{p}{2}\right], \bar{v} \in V(\overline{G})\}$，$\overline{V}_2 = V(\overline{G}) \setminus \overline{V}_1$.

先证 V_1 非空。假若 V_1 是空集，则 $V_2 = V(G)$. 对于任意 $w \in V_2$，$d_G(w) < \left[\frac{p}{2}\right]$，则有

$$d_{\overline{G}}(w) = p - 1 - d_G(w) > p - 1 - \left[\frac{p}{2}\right]$$

由度的整数性得　$$d_{\overline{G}}(w) \geqslant p - \left[\frac{p}{2}\right] \geqslant \left[\frac{p}{2}\right]$$

即 $\delta(\overline{G}) \geqslant \left[\frac{p}{2}\right]$. 由引理 2.4 得 $d(\overline{G}) \leqslant 2$，这和 $d(\overline{G}) = 3$ 矛盾。即 V_1 非空。

同理可证 V_2、$\overline{V}_1$、$\overline{V}_2$ 均非空。

下面分两种情况证明引理结论。

情况 1　若对任意 $v \in V_1, u \in V_2$，有 $d_G(u,v) \neq 3$，且对任意 $\bar{v} \in \overline{V}_1, \bar{u} \in \overline{V}_2$，有 $d_{\overline{G}}(\bar{u},\bar{v}) \neq 3$.

在 G 中，设由所有与 V_1 的顶点相关联的边组成的边集为 E_1，$E_2 = E(G)\backslash E_1$. 因 $d(G) = 3$，故，此情况时，对任意 $v \in V_1, u \in V_2$，必有 $d_G(u,v) \leqslant 2$. 因 V_1 中的顶点 v 满足 $d_G(v) \geqslant \left[\frac{p}{2}\right]$，同引理 2.4 的结论类似得对于任意 $v_1, v_2 \in V_1$，有 $d_G(v_1,v_2) \leqslant 2$. 因此，同引理 2.2 不难证明以下结论：

a) E_1 中的任意两条边必染不同色；

b) E_1 的任一边与 E_2 的任一边必染不同色。

设在 G 中，由 V_1、V_2 所导出的子图分别记为 H_1, H_2，则 $E(H_1) \subseteq E_1$，$E_2 = E(H_2)$，由结论 a)、b) 得

$$\chi_4'(G) \geqslant |E(H_1)| + |E_1\backslash E(H_1)| + \chi_4'(H_2) \tag{3}$$

在 $\overline{G}$ 中，设由所有与 V_2 的顶点相关联的边所组成的边集为 $\overline{E}_2$，$\overline{E}_1 = E(\overline{G})\backslash \overline{E}_2$，$\overline{H}_1$、$\overline{H}_2$ 分别表示由 V_1、V_2 在 $\overline{G}$ 中所导出的子图。由证明 V_1 非空我们注意到 $V_2 \subseteq \overline{V}_1$，因此，对于任意 $\bar{v}_1$、$\bar{v}_2 \in V_2$，则有 $d_{\overline{G}}(\bar{v}_1,\bar{v}_2) \leqslant 2$. 设 $V_1^{(1)} = \overline{V}_1\backslash V_2$，则 $V_1 = \overline{V}_2 \cup V_1^{(1)}$. 对于任意 $\bar{w}_1 \in V_2 \subseteq \overline{V}_1$，$\bar{w}_2 \in V_1$，若 $\bar{w}_2 \in \overline{V}_2$，因 $d_{\overline{G}}(\bar{w}_1,\bar{w}_2) \neq 3$，由引理条件得 $d_{\overline{G}}(\bar{w}_1,\bar{w}_2) \leqslant 2$；若 $\bar{w}_2 \notin \overline{V}_2$，则 $\bar{w}_2 \in V_1^{(1)} \subseteq \overline{V}_1$，由引理 2.4 类似有 $d_{\overline{G}}(\bar{w}_1,\bar{w}_2) \leqslant 2$，因此同结论 a)、b) 类似有以下结论：

c) $\overline{E}_2$ 中的任意两条边必染不同色；

d) $\overline{E}_2$ 的任一边与 $\overline{E}_1$ 的任一边必染不同色。

由 $E(\overline{H}_2) \subseteq \overline{E}_2$，$\overline{E}_1 = E(\overline{H}_1)$ 和结论 c)、d) 有

$$\chi_4^T(\overline{G}) \geqslant \chi_4'(\overline{H}_1) + |\overline{E}_2\backslash E(\overline{H}_2)| + |E(\overline{H}_2)| \tag{4}$$

设 $|V_1| = p_1$，$|E(H_1)| = q_1$，$E(\overline{H}_2) = q_2$. 因 V_1、V_2 非空，则 $0 < p_1 < p$，且 $|V_2| = p - p_1$. 于是由(2)、(3)、(4) 式得

$$\begin{aligned}\chi_4^T(G) + \chi_4^T(\overline{G}) \geqslant & |E(H_1)| + |E\backslash E(H_1)| + \chi_4'(H_2) + p \\ & + \chi_4'(\overline{H}_1) + |\overline{E}_2\backslash E(\overline{H}_2)| + |E(\overline{H}_2)| + p \\ \geqslant & (q_1 + p_1) + \chi_4^T(\overline{H}_1) + q_2 + (p + p_1) + \chi_4^T(H_2) \\ & + |E_1\backslash E(H_1)| + |\overline{E}_2\backslash E(\overline{H}_2)|\end{aligned} \tag{5}$$

同引理 2.3 的证明得

$$(q_1 + p_1) + \chi_4^T(\overline{H}_1) \geqslant \frac{3p_1^2 + 10p_1 - 1}{8} \tag{6}$$

$$q_2 + (p - p_1) + \chi_4^T(H_2) \geqslant \frac{3(p - p_1)^2 + 10(p - p_1) - 1}{8} \tag{7}$$

而
$$|E_1\backslash E(H_1)| + |\overline{E}_2\backslash E(\overline{H}_2)| = |E(K_{p_1,p-p_1})| = p_1(p - p_1) \tag{8}$$

其中 $K_{p_1,p-p_1}$ 表示完全偶图。由(5)、(6)、(7)、(8) 式及 $0 < p_1 < p$ 得

$$\chi_4^T(G) + \chi_4^T(\overline{G}) \geqslant \frac{3p^2 + 10p - 1}{8} + \frac{2p_1(p - p_1) - 1}{8} \geqslant \frac{3p^2 + 10p - 1}{8}$$

由色数的整数性，即得此时引理结论成立。

情况 2　若存在 $v \in V_1, u \in V_2$，使 $d_G(u,v) = 3$，或存在 $\bar{v} \in \overline{V}_1, \bar{u} \in V_2$，使 $d_{\overline{G}}(\bar{u},\bar{v}) = 3$.

先证情况：若存在 $v\in V_1$，$u\in V_2$，使 $d_G(u,v)=3$，且对任意 $\overline{v}_1\in\overline{V}_1$，$\overline{u}\in\overline{V}_2$，有 $d_G(\overline{u},\overline{v})\neq 3$. 设 $V_3=\{v_i|vv_i\in E(G),v_i\in V(G)\}$，$V_4=V(G)\setminus(V_3\cup\{v\})$，则由 $d_G(v)\geqslant\left[\frac{p}{2}\right]$和讨论 p 的奇、偶性，得

$$\left[\frac{p}{2}\right]\leqslant|V_3|,\qquad |V_4|\leqslant p-\left[\frac{p}{2}\right]-1\leqslant\left[\frac{p}{2}\right] \tag{9}$$

在 G 中，设由所有与 v 或 V_3 的顶点相关联的边组成的边集为 E_3，显然 E_3 是 G 的一个 4- 边完全集，由[1，引理 3.1]得 $\chi_4'(G)\geqslant|E_3|$. 设 $E_4=E(G)\setminus E_3$，则 $E_4=\{x_ix_j|x_ix_j\in E(G),x_i,x_j\in V_4\}$，且有

$$\chi_4'(G)\geqslant|E_3|=|E(G)|-|E_4| \tag{10}$$

另一方面，因 $d_G(u,v)=3$，因此在 G 中，u 一定与 $V_3\cup\{v\}$ 的所有顶点都相邻。在 $\overline{G}$ 中，设由所有与 u 与 $V_3\cup\{v\}$ 的顶点相关联的边组成的边集为 $\overline{E}_3$，两个端点都在 $V_4\setminus\{u\}$ 中的所有边组成的边集为 $\overline{E}_4$，同(10)类似讨论有

$$\chi_4'(\overline{G})\geqslant|\overline{E}_3|=|E(\overline{G})|-|\overline{E}_4| \tag{11}$$

设 $|V_4|=t$，由(9)式和 E_4，$\overline{E}_4$ 的意义，得

$$|E_4|+|\overline{E}_4|\leqslant|E(K_t)|\leqslant\left[\frac{p}{2}\right]\left\{\left[\frac{p}{2}\right]-1\right\}\cdot\frac{1}{2} \tag{12}$$

其中 K_t 表 t 阶完全图。由(2)、(10)、(11)、(12)式得

$$\begin{aligned}\chi_4^T(G)+\chi_4^T(\overline{G})&\geqslant|E_3|+|\overline{E}_3|+2p=\frac{p(p-1)}{2}-(|E_4|+|\overline{E}_4|)+2p\\&\geqslant\frac{p(p-1)}{2}-\left[\frac{p}{2}\right]\left\{\left[\frac{p}{2}\right]-1\right\}\cdot\frac{1}{2}+2p\\&=\begin{cases}\dfrac{3p^2+14p}{8} & \text{当 } p \text{ 为偶数时}\\[2mm] \dfrac{3p^2+16p-3}{8} & \text{当 } p \text{ 为奇数时}\end{cases}\end{aligned} \tag{13}$$

由(13)式及色数的整数性，得此时引理结论成立。

我们注意到在证明以上情况时，只用了条件 $d_G(u,v)=3$，因此，$d_{\overline{G}}(\overline{u},\overline{v})=3$ 的情形与 $d_G(u,v)=3$ 是一样的，我们可得情况 2 的其它情形引理结论也成立。

综上，引理结论成立。

综合引理 2.1、2.3 及 2.5，可知定理 1 的第一个结论成立。当 p 为偶数时，则有

$$\left\{\frac{3p^2+10p-1}{8}\right\}=\frac{3p^2+10p}{8}$$

如 G 为两个不交的 $K_{p/2}$ 的并时，注意到 $\delta(\overline{G})=\frac{p}{2}$ 即可得(1)式取等号。

至此定理 1 得证。

本文得到杨万年教授的鼓励和帮助，在此表示衷心感谢！

参 考 文 献

1　张忠辅，孙良．图的 n-全色数，数学年刊，13A，1992，(1)：70～75

2　Chartrand C，Celler D，Hedetniemi. H. A generalization of the chromatic number. Proc. Combridge Philos. 1968，64：265～271

3　Bondy J A，Murty U S R. Craph theory with applications. The Macmillan Press Ltd，1976