(4) 16-8

计算地基板挠度的一种边界元法*

Analyzing the Stiffness of Foundation Plate By BEM

曾德荣**　　胡国华
Zeng Deirong　　Hu Guohua
（重庆大学工程力学系，重庆，630044）

TU470.3
O343.2

摘　要　利用汉克尔变换推导了弹性半空间地基板挠度的基本解；然后建立了其挠度的边界积分方程；讨论了均质弹性半空间地基上夹住边板、简支边板的挠度边界积分方程；建立了边界值的一般代数方程组；并给出了算例。

关键词　边界元法；板；数值方法

地基　挠度

中国图书资料分类法分类号　TU43；O343.2

ABSTRACT　This paper derives the basic solution of elastic half-space foundation plate by Hankel transform. Then its boundary integral equation of distortion is established. The paper discusses boundary integral equation on plate of fixxing and / or simple support boundary. Then a system of algebraic equations for the boundary values are established. A numerical example is given, its result shows that this Method is correct.

KEYWORDS　BEM; plate; numerical method

0　引　言

笔者拟用边界单元法来分析这种弹性地基板的挠度。这里假定地基是均质弹性半空间，混凝土路面厚度为 h，承受有车轮荷载 $P(r)$，板的挠度为 $W(r)$，板的挠度微分方程：

$$D\nabla^4 W(r) + q(r) = P(r) \tag{1}$$

$q(r)$ 为地基对板的反作用力。

$D = Eh^3/12(1-\mu)^2$ 为混凝土板的抗弯刚度。

现用边界元法来求解该方程。

1　基本解的求得

方程(1)中的 $P(r)$ 用单位集中力 $P^*(r)$ 代替，并且设这个单位力均布在以 C 为半径的圆周上：

---

* 收文日期　1995-03-21

** 曾德荣原系重大力学系研究生，现已分重庆交通学院工作

即
$$P^*(r)=\lim_{c\to 0}\frac{1}{2\pi c}\delta(r-c) \tag{2}$$

式中 $\delta(r-c)$ 为狄拉克函数，当 $r=c$ 时有 $\delta(r-c)=1$.

则(1)式可变换为具有挠度基本解 $w^*(r)$ 和相应于 $P^*(r)$ 的地基反力 $q^*(r)$ 的挠度微分方程。

$$D\nabla^4 w^*(r)+q^*(r)=P^*(r)$$

对此式进行如下汉克尔(Hankel)变换[1]：

$$\bar{f}(t)=\int_0^\infty f(r)\cdot r\cdot J_0(t\cdot r)\mathrm{d}r$$

$$f(r)=\int_0^\infty \bar{f}(t)\cdot t\cdot J_0(t\cdot r)\mathrm{d}t$$

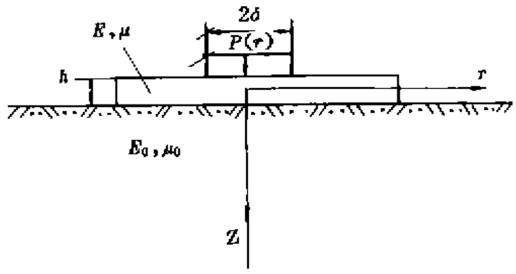

图 1　路基板结构

式中 $J_0(t,r)$ 为零阶第一类贝塞尔函数。这样就得：

$$t^4\overline{W}^*(t)=\frac{1}{D}\bar{q}^*(t)=\frac{1}{D}\overline{P}^*(t) \tag{3}$$

式中　$\overline{P}^*(t)=\int_0^\infty P^*(r)\cdot r\cdot J_0(t\cdot r)\mathrm{d}r=\frac{1}{2\pi}$

$\overline{W}^*(t),\bar{q}^*(t)$ 分别是 $W^*(r),q^*(r)$ 的汉克尔变换。

要从(3)式直接求出 $\overline{W}^*(t)$ 是很困难的，现在先求出在板上的单位荷载作用下，均质弹性地基的沉降 $W'(r,z)$. 这是一个轴对称问题，设其应力函数为 $\varphi(r,z)$，φ 应满足：

$$\nabla^4\varphi(r,z)=0$$

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

对该式进行汉克尔变换得

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}-t^2\right)^2\Phi(t,z)=0$$

该式的解为

$$\Phi(t,z)=(A_t+B_tz)\mathrm{e}^{-tz}+(C_t+D_tz)\mathrm{e}^{tz}$$

对 $\Phi(t,z)$ 进行汉克尔逆变换得

$$\Phi(r,z)=\int_0^\infty t\Phi(t,z)\cdot J_0(r\cdot t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^\infty t[(A_t+B_t^2)\mathrm{e}^{-tz}+(C_t-D_tz)\mathrm{e}^{tz}]J_0(r,t)\mathrm{d}t$$

现在利用边界条件：

1) $z\to+\infty$　　$W'(r,z)=0$

2) 地基表面应力　　$\sigma_z=-q^*(r)$　　$\tau_{rz}=0$

来确定常系数得：

$$A_t=-\frac{2}{t^3}\bar{q}^*(t)\qquad B_t=\frac{-\bar{q}^*(t)}{t^2}\qquad C_t=D_t=0$$

这样地基在其表面的沉降值 $W'(r,z)|_{z=0}$：

$$W'(r,z)|_{z=0} = \frac{1-\mu_0}{G_0}\int_0^{+\infty}\bar{q}^*(t)\cdot J_0(r\cdot t)\mathrm{d}r \tag{4}$$

将(3)式代入(4)则有

$$W'(r,z)|_{z=0} = \frac{1-\mu_0}{G_0}\int_0^{+\infty}(-Dt^4W^*(t)+\bar{P}^*(t))\cdot J_0(t\cdot r)\mathrm{d}t$$

对该式进行汉克尔变换：

$$W'|_{z=0} = \frac{1-\mu_0}{G_0}[-Dt^4W^*(t)+\bar{P}^*(t)]/t$$

对于板与地面接触面有：

$$W'|_{z=0} = \bar{W}^*$$

即

$$\frac{1-\mu_0}{G_0}[-Dt^4\bar{W}^*(t)+P^*(t)]/t = \bar{W}^*(t)$$

解之可得

$$\bar{W}^*(t) = \left\{\frac{1}{2\pi D}\cdot\frac{1}{t}\right\}\Big/\left[t^3+\frac{G_0}{D(1-\mu_0)}\right]$$

对该式进行逆变换得基本解：

$$W^*(r) = \int_0^{+\infty} t\cdot\bar{W}^*(t)\cdot J_0(t,r)\mathrm{d}r$$

$$W^*(r) = \int_0^{\infty}\frac{1}{2\pi D}\frac{1}{t^3+\frac{G_0}{D(1-\mu_0)}}J_0(r\cdot t)\mathrm{d}t \tag{5}$$

2 边界积分方程

方程(1)中 q 是挠度 W 的函数，若将此式直接利用基本解 $W^*(r)$ 为权函数进行加权，仍得不到边界积分方程，所以如何才能得到弹性地基上板的挠度的边界积分方程是一个至今未解之难题[2]。

这里我们认为地基是完全弹性的，板呈刚性或半刚性的，而车轮荷载又可视为作用在板上的圆形均布荷载，那么地基对板的反力也是轴对称的，不妨设其呈半球形分布。那么地基表面在 $q(r)$ 作用下沉降 $W'(r,z)$ 有如下计算式：

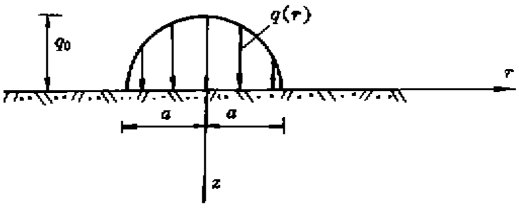

图 2 载荷分布

$$q(r) = \begin{cases}\frac{3}{2}q_0\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}} & r\leqslant a\\ 0 & r>a\end{cases}$$

地基表面沉降

$$W'(r,z)|_{z=0} = \frac{3(1+\mu_0)q_0 a}{2E_0}\int_0^\infty J_0\left(\frac{r}{a}x\right)\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}2(1-\mu_0)\mathrm{d}x$$

令

$$K_0 = \frac{3(1-\mu_0^2)a}{E_0} \qquad I_0(r) = \int_0^\infty J_0\left(\frac{r}{a}x\right)\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}\mathrm{d}x$$

$$W'(r,z)|_{z=0} = K_0 I_0(r) q_0 = W(r)$$

则得

$$q_0 = \frac{W(r)}{K_0 I_0(r)}$$

代入上式

$$q(r) = \frac{3}{2}\frac{W(r)}{K_0 I_0(r)}\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}} = f(r)W(r) \tag{6}$$

式中

$$f(r) = \frac{3}{2}\frac{1}{K_0 I_0(r)}\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}$$

这样有

$$q^*(r) = f(r)W^*$$

将(6)代入方程(1)，并以基本解为权函数，对其进行加权并在区域 Ω 内积分有：

$$D\nabla^4 W(r) + f(r)W(r) = P(r)$$

$$\int_\Omega (D\nabla^4 W + f(r)W(r))W^*\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega PW^*\mathrm{d}\Omega$$

利用瑞利－格林(Rayleigh-Green)互等定理[3]：

$$\int_\Omega (W^*\nabla^4 W - W\nabla^4 W^*)\mathrm{d}\Omega = \int_S [W^*\frac{\partial}{\partial n}\nabla^2 W - W\frac{\partial}{\partial n}\nabla^2 W^* - \frac{\partial W^*}{\partial n}\nabla^2 W + \frac{\partial W}{\partial n}\nabla^2 W^*]\mathrm{d}S$$

将该式两边同时乘上 D，然后再加上 $\int_\Omega f(r)WW^*\mathrm{d}l$，就得到均质弹性地基板内任意一点 P 的挠度 $W(r)$ 的边界积分方程式：

$$W(P) = D\int_S [-W^*\frac{\partial}{\partial n}\nabla^2 W + W\frac{\partial}{\partial n}\nabla^2 W^* + \frac{\partial W^*}{\partial n}\nabla^2 W - \frac{\partial W}{\partial n}\nabla^2 W^*]\mathrm{d}S + \int_\Omega P(r)W^*\mathrm{d}\Omega \tag{7}$$

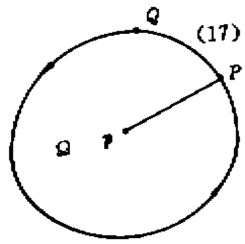

图 3　积分路径

当 P 趋于区域边界 S 上时，可得边界点 P 上扰动的一个挠度边界积分方程：

$$\frac{1}{2}W(P)=D\int_S\left[-W^*\frac{\partial}{\partial n}\nabla^2W+W\frac{\partial}{\partial n}\nabla^2W^*+\frac{\partial W^*}{\partial n}\nabla^2W-\frac{\partial W}{\partial n}\nabla^2W^*\right]dS \tag{8}$$

对(7)式进行 ∇^2 运算，并取区域内部点 P 趋于边界点 P 时的极限，又得板边界上任一点扰动的又一边界积分方程：

$$\nabla^2W(P)=D\int_S\left[-\nabla^2W^*\frac{\partial\nabla^2W}{\partial n}+\frac{\partial\nabla^2W^*}{\partial n}\nabla^2W+W\frac{\partial}{\partial n}\nabla^4W^*\right.$$
$$\left.-\frac{\partial W}{\partial n}\nabla^4W^*\right]dS-\int_\Omega P(r)\nabla^2W^*d\Omega \tag{9}$$

对于夹住边或简支边界或自由边，其边界量(W,θ,V_n,M)中只有两个是未知的，因此离散边界，联立(8)、(9)两式，即可求得全部边界值，再代入离散了的(7)式即可求出板内任意一点的扰度 $W(P)$.

现分别讨论夹住边和简支边两种情况。

2.1 夹住边情况

边界条件为：$W=0\qquad \dfrac{\partial W}{\partial n}=0$

并令

$$-D\frac{\partial\nabla^2W^*}{\partial n}=V_n^*\qquad -D\nabla^2W^*=M^*\qquad \frac{\partial W^*}{\partial n}=\theta^*$$

$$-D\frac{\partial\nabla^2W}{\partial n}=V_n\qquad -D\nabla^2W=M\qquad \frac{\partial W}{\partial n}=\theta$$

代入(8)、(9)两式简化得方程组：

$$\int_S W^*V_n ds-\int_S\theta^*MdS=\int_\Omega P(r)W^*d\Omega \tag{10}$$

$$\int_S W^*V_n ds-\int_S(V_n^*+\delta(P-Q))MdS=\int_\Omega P(r)M^*d\Omega \tag{11}$$

2.2 简支边情况

边界条件有 $\quad W=0\qquad \nabla^2W=0$

代入(8)，(9)两式并简化有：

$$\int_S W^*V_n ds+\int_S M^*\theta dS=-\int_\Omega P(r)W^*d\Omega \tag{12}$$

$$\int_S(D\nabla^2W^*)V_n ds+\int_S(-D\nabla^2W^*)\theta dS=-\int_\Omega P(r)\nabla^2W^*d\Omega \tag{13}$$

现对边界进行离散，假设边界 S 被离散成为 n 个节点的 n 个单元，同时对板面内部区域也进行离散，成为 m 个单元，得代数方程：

$$[A]_{2n\times 2n}\cdot\{x\}_{2n\times 1}=\{C\}_{2n\times 1}$$

对于夹住边板：
$$\{x\}=\begin{Bmatrix}\{V_n\}\\ \vdots\\ \{M\}\end{Bmatrix}_{2n\times 1}$$

对于简支边板：　$\{x\} = \begin{Bmatrix} \{V_n\} \\ \vdots \\ \{\theta\} \end{Bmatrix}_{2n \times 1}$

3　算　　例

设板厚为 $h = 18$ cm，$E_0/E = 0.4$，$\mu_0 = \mu = 0.2$，板面圆形均布荷载半径为 $2\delta = 22$ cm，载荷集度 q 为单位值（t/m），混凝土板为周边夹住的矩形板。其计算结果如下：

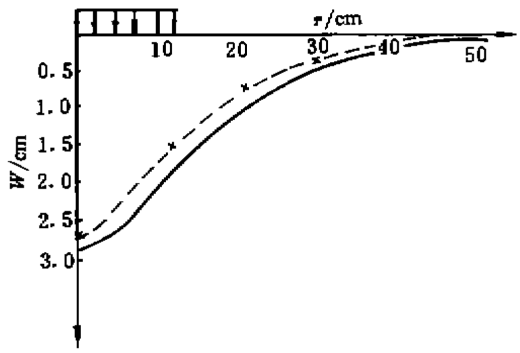

图 4　板中心变形比较

4　结　　论

本文建立了均质弹性半空间地基板的边界积分方程，提出一种地基反力模型，即地基反力 $q(r)$ 为：

$$q(r) = f(r) \cdot W(r) \qquad \text{呈半球形分布}$$

其中

$$f(r) = \frac{3}{2}\,\frac{1}{K_0 I_0(r)}\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}$$

该反力模型，可包括温克勒或者怕斯汀模型：

当 $f(x) =$ 常数，就是温克勒模型

当 $f(x) = (K - G\nabla^2)$ 时，就是帕斯汀模型

显然本文的模型对于汽车轮荷是更合适的，具有一定的实际意义。

参　考　文　献

1　示照宏．路面力学．北京：人民交通出版社，1988. 201～206

2　Jari Puttonen. Boundary Element Analysis of Plate on Elastic Foundation. J. Num. Method. 1986, 23(2): 283～303

3　Katsikadelis J T. Plates on Elastic Foundation by BIE Method. J. Eng. Mech. 1984, 110(7): 575～581