(13) 79-84

证券组合投资决策的两种最优化方法*

Two Optimization Methods for Portfolio Investment Decision

刘　星　　　杨秀苔
Liu Xing　　　Yang Xiutai

(重庆大学工商管理学院，重庆，630044；第一作者 39 岁，男，博士生)

F830.9

A

摘　要　在介绍证券组合投资的基本理论和计算方法的基础上，提出了一种采用效用函数寻找最优证券组合的决策模型；然后，将此模型与条件极值优化模型作比较分析，结果表明这种新的模型在一定条件下更有效。

关键词　证券组合；投资决策；最优化方法

最佳化

中国图书资料分类法分类号　F202；F224.0

ABSTRACT　On the basis of introducing some fundamental theories and computational methods of portfolio investment, this paper derives a decision model for searching optimal portfolio with the utility function. Then, after comparing the new model with the conditional extreme optimization model, which has been usually considered by people, the result shows the new model would be more efficient under certain conditions.

KEYWORDS　portfolio; investment decision; the optimization method

0　引　　言

在资金和时间有限的条件下，证券投资者面对众多证券而作出投资决策时，往往期望尽可能获取较高的投资收益和承受较低的投资风险。虽然，在一定程度上讲，这两种目标有时会出现矛盾并难以同时满足，但是通过分析投资者对收益与风险的偏好将有助于作出正确的选择。因此，根据证券投资分散化的基本原则，投资者应该从所有市场证券中恰当地选取一部分证券进行投资组合，以达到既减小风险又增大收益的目的。笔者正是基于此目标，比较全面地分析了现代证券组合投资的基本原理、介绍了证券组合的收益与风险的计算方法、以及提出了一种有效的证券组合投资决策的最优化方法。

1　证券组合投资的收益与风险度量方法

1.1　不含无风险证券的证券组合收益率和标准差的计算

假定投资者选定 n 种证券进行投资，第 i 种证券的实际收益率和标准差分别为 r_i 和 σ_i，它

---

* 收文日期　1995-07-07

国家教委留学回国人员基金资助项目

们是两个随机变量，根据某些影响因素而决定。由于证券的实际收益率 r_i 难以准确预测，故通常用其期望收益率 $\bar{r}_i$ 来替代。$\bar{r}_i$ 越大表示第 i 种证券的预计收益越大，σ_i 越小表示第 i 种证券的风险越小。若投资者投资于第 i 种证券的资金比例系数为 x_i，则有 $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$，且该投资者的证券组合的实际收益率向量(R_p)和期望收益率向量($\bar{R}_p$)分别为：

$$R_p = X^T R \tag{1}$$

$$\bar{R}_p = X^T \bar{R} \tag{2}$$

其中，

$$X = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)^T$$

$$R = (r_1, r_2, r_3, \cdots, r_n)^T$$

$$\bar{R} = (\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3, \cdots, \bar{r}_n)^T$$

$$N = (1, 1, 1, \cdots, 1)^T$$

$$N^T X = 1, x_i \geqslant 0$$

又假定投资者所持有证券组合的持有期较短，如不超过 3 个月，则一般认为可以将证券组合收益率的概率分布视为正态分布，并用标准差或方差来估计证券组合的实际收益率偏离期望收益率的程度。因此，证券组合的期望收益率的标准差矩阵(σ_p)表为：

$$\sigma_p = (X^T C X)^{1/2} \tag{3}$$

其中，

$$C = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots\cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots\cdots & \sigma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots\cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

C 是一个对称方阵，其主对角线上的元素 σ_{ii} 表示第 i 种证券的方差，元素 σ_{ij} 表示第 i 种证券与第 j 种证券的协方差，$\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$（$\rho_{ij}$ 为证券 i 和 j 的期望收益率之间的相关系数），i、$j = 1, 2, 3, \cdots, n$。并且，称 C 为证券组合的方差一协方差矩阵。

1.2 含有无风险证券的证券组合收益率和标准差的计算

根据马科维茨的资产组合投资理论，每一种用于投资的资产都具有风险，即 n 种风险资产中每一种资产的收益率在资产持有期内都不确定，但是，实际上如象国库券、养老基金和保险基金等证券的风险很小或近似为零，即其持有期内的收益率预先确定。因此，当投资者选择证券组合时，可以将一部分资金投入无风险证券，其余部分资金投入风险证券，以使证券组合更好地分散化，从而增大获取高收益和低风险的可能性。

假定存在 n 种风险证券和无风险证券，其中，风险证券为 m 种，则无风险证券为($n-m$)种。所以，由式(2)，可得：

$$\bar{R}_p = X_1^T \bar{R}_1 + X_2^T R_2 = X_1^T \bar{R}_1 + (1 - X_1)^T R_2 \tag{4}$$

其中，

$$X_1 = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_m)^T$$

$$X_2 = (x_{m+1}, x_{m+2}, x_{m+3}, \cdots, x_n)^T$$

$$\bar{R}_1 = (\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3, \cdots, \bar{r}_m)^T$$

$$R_2 = (r_{m+1}, r_{m+2}, r_{m+3}, \cdots, r_n)^T$$

$$N^T X = \sum_{i=1}^{m} x_i + \sum_{j=m+1}^{n} x_j = 1, x_i, x_j \geqslant 0$$

由于任意两种证券 i 和 j 的期望收益率之间的协方差为 $\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$，其中，$i$ 表示第 i 种

风险证券，j 表示第 j 种无风险证券，所以，$\sigma_j = 0$，即 $\sigma_{ij} = 0$。因此，根据式(3)，无风险证券和风险证券组成的证券组合的方差一协方差矩阵为：

$$\sigma_P^2 = X^T C X = (X_1, X_2)^T \begin{pmatrix} C' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (X_1, X_2) = X_1^T C' X_1 \tag{5}$$

其中，

$$X_1 = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)^T$$

$$C' = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots\cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots\cdots & \sigma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots\cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

$$N^T X = 1$$

2　证券组合投资的可行集与有效集

2.1　不含无风险证券的证券组合的可行集与有效集

证券组合投资的可行集也称为机会集，它表示 n 种证券所可能组成的证券组合的全体集合。通过对投资者所选证券组合的大样本分析，一般认为可行集呈伞状图形，如图 1 所示。虽然，n 种证券的集合从理论上讲可以组成无限多种证券组合，但实际上投资者构造其证券组合时并不需要评估所有的证券组合，而只须考察其中的某个子集，即证券组合投资的有效集。这是因为事实上存在如下三个假定：

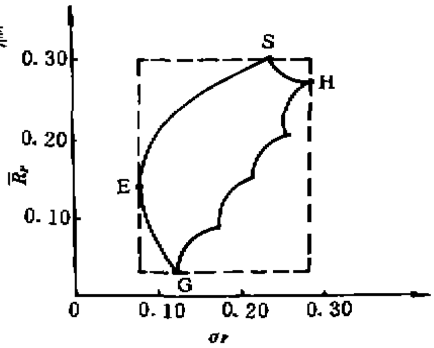

图 1　原有的可行集与有效集

1) 在相同风险条件下，投资者将选择期望收益率最大的证券组合；

2) 在相同期望收益率条件下，投资者将选择风险最小的证券组合；

3) 并且，对于厌恶风险的投资者来讲，他将按照边际效用递减的原则来选择其证券组合。

因此，根据以上三个假定，通过点 E 和 H 分别作两条垂直于横轴的直线，以及过点 S 和点 G 分别作两条平行于横轴的直线，从而能够确定投资者所偏好的证券组合将位于曲线 $\overset{\frown}{ES}$ 上，故称 $\overset{\frown}{ES}$ 为不含无风险证券的证券组合的有效集或有效边界。可见，满足此三个假定的证券组合的有效集位于该可行集的西北角。

2.2　含有无风险证券的证券组合的可行集与有效集

当引入无风险证券之后，证券组合仍然具有风险性，而且上述可行集和有效集将发生显著变化，参见图 2. 可见，新的可行集存在两条边界，并由直线 $\overline{FC}$、$\overline{FT}$ 和曲线 $\overset{\frown}{TC}$ 所组成。直线 $\overline{FT}$ 代表的上边界(斜率最大) 表示由无风险证券和原有有效集中某种证券组合所构成的各种证券组合，其投资收益率相对较大，并且与原有有效集相切于点 T. 与原有有效集比较，曲线 $\overset{\frown}{AT}$ 代表的证券组合不如 $\overset{\frown}{BT}$ 更加有效，而且，新的有效集仅保留了原有有效集中的曲线 $\overset{\frown}{TC}$

部分。直线$\overline{FC}$代表的下边界表示由无风险证券和某种风险证券所构成的各种证券组合，其投资收益率相对较小。所以，新的有效集由直线$\overline{FT}$和曲线$\overset{\frown}{TC}$所组成。在引入无风险证券的情况下，投资者有更大的选择余地，比较厌恶风险的投资者，倾向于选择$\overline{FT}$上的证券组合，即同时投资于无风险证券和风险证券；比较不厌恶风险的投资者，则倾向于选择$\overset{\frown}{TC}$上的证券组合，即仅对风险证券进行投资。

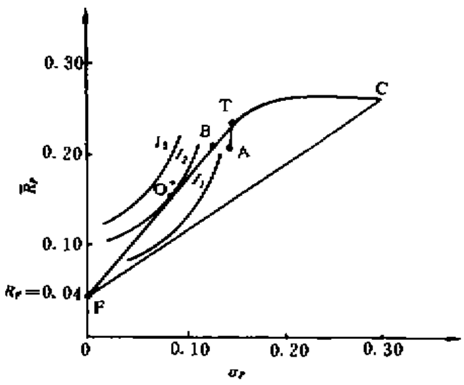

图 2 新的可行集与有效集

3 最优证券组合的确定方法

3.1 采用无差异曲线法选择最优证券组合

按照西方经济学中关于无差异曲线的定义，无差异曲线实质上是一组等效用曲线并表示投资者对待两种可供选择的对象的偏好，它具有两个最基本的特征：

1）同一条无差异曲线具有等效用性，即其吸引力相同；

2）任何两条无差异曲线互不相交。

因此，如果运用无差异曲线来确定投资者的最优证券组合，那么，仍可以用$\overline{R}_P$-σ_P平面中的横轴代表风险，以标准差(σ_P) 度量；用纵轴代表收益，以期望收益率($\overline{R}_P$) 度量，并标绘在图 2 中。

就厌恶风险的投资者而言，前面已指出其最优证券组合必定位于可行集的最西北角，即图 2 中无差异曲线 I_2 与有效集的切点 O^* 表示投资者所应选择的最优证券组合。同时，最优证券组合 O^* 也是直线$\overline{FT}$与曲线$\overset{\frown}{TC}$的切点 T，即此时点 O^* 与点 T 重合。下面将进一步推导最优证券组合的计算公式：

假设效用函数表示为 $U(\overline{R}_P,\sigma_P)=0$，则其显函数表示为 $U=f(\overline{R}_P)$，由泰勒展开式并认为函数 $U=f(\overline{R}_P)$ 具有连续导数，故有：

$$U=f(\overline{R}_P)+f'(\overline{R}_P)(R_P-\overline{R}_P)+[f''(\overline{R}_P)/2!](R_P-\overline{R}_P)^2+\cdots+\sum_{n=3}^{\infty}[f^{(n)}(\overline{R}_P)/n!](R_P-\overline{R}_P)^n \tag{6}$$

对式(6) 两边分别求期望值，有：

$$E(U)=f(\overline{R}_P)+f'(\overline{R}_P)E(R_P-\overline{R}_P)+[f''(\overline{R}_P)/2!]E[(R_P-\overline{R}_P)^2]+\cdots+\sum_{n=3}^{\infty}[f^{(n)}(\overline{R}_P)/n!]E[(R_P-\overline{R}_P)^n] \tag{7}$$

$\because$ $E(R_P-\overline{R}_P)=E(R_P)-E(\overline{R}_P)=0$

且 $\sum_{n=3}^{\infty}[f^{(n)}(\overline{R}_P)/n!]E[(R_P-\overline{R}_P)^n]\doteq 0$

$$\therefore \quad E(U)\doteq f(\overline{R}_P)+\sigma_P^2[f''(\overline{R}_P)/2!] \tag{8}$$

再将式(8) 两边分别对 $\overline{R}_P$ 和 σ_P 求偏导，有：

$$[\partial E(U)]/[\partial \overline{R}_P] = f'(\overline{R}_P) + \sigma_P^2[f'''(\overline{R}_P)/2!]$$

$$[\partial E(U)]/[\partial \sigma_P] = \sigma_P[f''(\overline{R}_P)]$$

$$\therefore \quad \partial \overline{R}_P/\partial \sigma_P = \sigma_P[f''(\overline{R}_P)]/\{f'(\overline{R}_P) + \sigma_P^2[f'''(\overline{R}_P)/2!]\} \tag{9}$$

式(9)表示无差异曲线上任意一点处的斜率。因此，点 T 处的最优证券组合可由如下联立方程求解得出：

$$\begin{cases} \dfrac{\overline{R}_{PT} - R_f}{\sigma_{PT}} = \dfrac{\sigma_{PT}[f''(\overline{R}_{P_T})]}{f'(\overline{R}_{PT}) + \sigma_{PT}^2[f'''(\overline{R}_{PT})/2!]} & (10) \\ U(\overline{R}_{PT}, \sigma_{PT}) = 0 & (11) \end{cases}$$

其中，式(10)左边表示由图 2 中直线$\overline{FT}$所得到的切点 T 的斜率，R_f 代表某种已知收益率最大的无风险证券的收益率；式(10)右边表示由某一条无差异曲线 L 所得到的切点 T 的斜率。式(11)则表示投资者的效用函数在点 T 处的等式。

3.2　采用条件极值法选择最优证券组合

前面部分关于收益与风险的假定曾指出，投资者通常总是厌恶风险的，即在收益一定的条件下，他可能选择风险最小的证券进行投资。所以，位于图 2 中有效集上的最优证券组合可归结为求解以下条件极值的问题来确定。于是，由式(3)，有：

$$\min \sigma_P = (X^T C X)^{1/2} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & \overline{R}_P = X_1^T \overline{R}_1 + X_2^T R_2 \\ & N^T X = 1; x_i, x_j \geqslant 0 \\ & \min\{r_{2j}\} \leqslant \overline{R}_P \leqslant \max\{\bar{r}_{1i}\} \\ & i = 1,2,3,\cdots,m, j = m+1, m+2, m+3, \cdots, n \end{aligned}$$

其中，　$\max\{\bar{r}_{1i}\}$——m 种风险证券中具有最大期望收益率的证券的收益率；

$\min\{r_{2j}\}$——$n-m$ 种无风险证券中具有最小确定收益率的证券的收益率。

若投资者按照风险一定的条件来选择收益最大的证券进行投资，则位于图 2 中有效集上的最优证券组合可归结为求解如下条件极值的问题予以确定，即有：

$$\max \overline{R}_P = X_1^T \overline{R}_1 + X_2^T R_2 \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & \sigma_P = (X^T C X)^{1/2} \\ & N^T X = 1; x_i, x_j \geqslant 0 \\ & 0 \leqslant \sigma_P^2 \leqslant \max\{\sigma_{ij}\} \\ & i, j = 1,2,3,\cdots,n \end{aligned}$$

其中，　$\max\{\sigma_{ij}\}$—— 方差一协方差矩阵中具有最大值的元素。

4　有关问题的讨论

如果利用无差异曲线法选择最优证券组合，则其关键的问题在于怎样描绘投资者的无差异 曲线，也即写出效用函数的数学表达式。实际上，每一位投资者都有自己不同于其他投资者的无差异曲线。虽然，从应用意义上看，没有必要考察每一位投资者的无差异曲线，但是，我们可以按照投资者对待收益与风险的不同态度给予区别，即将他们划分为极度厌恶风险的投资者、中等程度厌恶风险的投资者和略微厌恶风险的投资者。因此，可以采取以下方法来确定上述三种类型中任意一类投资者的无差异曲线，即针对某一投资者分别提出一系

列关于测试冒险精神的问题。例如，给出两种可供投资者选择的替代方案：其一是简单地接受 5 000 元现金；其二是采用抛掷硬币的办法来作出决定，硬币正面代表获取 4 000 元最低现金，硬币反面代表获取 10 000 元最高现金。在此提问过程中，应该同时不断改变硬币正、反两面所代表的现金额，以便形成若干组测试数据，如 4 000 元，10 000 元；4 200 元，9 000 元；4 400 元，8 000 元；4 600 元，7 000 元；4 800 元、6 000 元。这样重复提问并进行两方案比较的次数必须一直持续到投资者认为这两种可替代方案的效用或吸引力完全相同时为止，从而经过进一步分析所得测试结果来估计投资者的无差异曲线的形状和位置。然后，运用计算机进行最优拟合，以便依据实际描绘的无差异曲线确定出某类投资者的效用函数。

如果利用条件极值法选择最优证券组合，则其关键的问题在于怎样较准确地预测各种风险证券的期望收益率、方差及协方差，并将其作为已知参数代入目标函数和约束条件方程中求解。因此，条件极值法的真正含义是：在风险一定的条件下，求取能够满足证券组合收益率最大的最优投资比例系数；或在收益一定的条件下，求取能够满足证券组合标准差最小的最优投资比例系数。

5 结束语

综上所述，对于证券组合投资决策的两种最优化方法来讲，尽管它们都能够为投资者选择最优证券组合所用，但是，这两种方法本身及其所得结果仍具有三点区别：

1）无差异曲线法所确定的最优证券组合是切点 T 处的证券组合，它同时位于新的有效集和原有有效集上。所以，它是严格意义上的最优证券组合。而条件极值法所确定的最优证券组合不一定在切点 T 处，它也可能位于新的有效集上或原有有效集上。所以，它是非严格意义上的最优证券组合，也可称为次优证券组合。

2）无差异曲线法能够较准确地反映投资者对未来收益与风险的偏好，因为无差异曲线和效用函数的确定是根据对每一类投资者进行实际测试和经过数学模型的最优拟合而得到的。而条件极值法在反映投资者的期望收益率和标准差的准确性方面不如无差异曲线法有效，因为条件极值法所采用的计算数据是历史数据或根据某种资产订价模型预测所得。

3）无差异曲线法的计算工作量比条件极值法更大，所以，当风险证券的种数超过三种时，投资者最好采用条件极值法来选择最优证券组合。

参 考 文 献

1 Alexander, Gordon J. The Derivation of Efficient Sets. Journal of Financial and Quantitative Analysis. 1976, 11 (5): 817～830

2 Sharpe, William F. A Simplified Model for Portfolio Analysis. Journal of finance, 1985, 41(6): 277～293

3 Merton, Robert C. An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio frontier. Journal of Financial and Quantitative Analysis. 1988, 7(3): 1851～1872

4 Pratt, John W. Risk Aversion in the Small and in the Large. Econometrica, 1993, 33(1～2): 122～139

5 杨秀苔，刘星．投资原理．重庆：重庆大学出版社，1992，88～95

6 刘星．证券组合投资的选择方法．投资理论与实践，1992，16(11)：21～25