1996 年 3 月　　重庆大学学报　(自然科学版)　　Vol. 19, №. 2
第 19 卷第 2 期　　Journal of Chongqing University (Natural Science Edition)　　Mar. 1996

⑨ 51-55

非线性动力学方程的 Neumann 级数——直接积分解法*

Neumann Series——Direct Integration Method for Solving Nonlinear Dynamic Equations

O313

蹇开林　　殷学纲
Jian Kailin　　Ying Xuegang
(重庆大学工程力学系,重庆,630044;第一作者 30 岁,男,在职博士生)

A

摘　要　提出了用直接积分和 Neumann 级数相结合求解非线性动力学方程的方法,并用算例验证了该方法的有效性。

关键词　非线性动力学方程;动力响应;Neumann 级数;直接积分方法
中国图书资料分类法分类号　O313

诺伊曼级数

ABSTRACT　A method for solving nonlinear dynamic equations is presented by combining direct with Neumann series. The advantage of the present method lies in high accuracy and short computing time. Finally, the effectivity of the method is demonstrated by numeric example.

KEYWORDS　nonlinear dynamic equations; dynamic response; Neumann series; direct integration method

0　引　言

对于非线性动力学方程可以采用分段线性化——直接积分法进行求解,其实质是把非线性动力学方程分段线性化,并将微分方程转化为代数方程求解。由于方程的非线性,往往需要进行多次平衡迭代,因而耗费大量 CPU 时间。所以缩短平衡迭代中求解线性方程组的时间是目前对数值求解非线性动力学方程方法研究的热点之一。Neumann 级数是关于矩阵求逆的级数展开式,即在已知[K]阵的逆阵后,求[K]+△[K]的逆阵时,可以用 Neumann 级数展开式逼近。若△[K]相对于[K]阵是一小变化量时,只取 Neumann 级数前二三项就可得到较高精度的结果。由于非线性动力学方程的平衡迭代过程中,根据经验其等效刚度阵的变化往往不大,因此我们把直接积分方法和 Neumann 级数相结合,用于求解非线性动力学方程,可以缩短非线性动力学方程的求解时间,并保证具有足够的精确度,其效果是较好的。

---

* 收文日期　1995-10-05

1 Neumann 级数

Neumann 级数是矩阵求逆的展开式，它的作用在于提高矩阵求逆的效率。设一矩阵$[\bar{K}]$，已求得其逆矩阵$[\bar{K}]^{-1}$，若另有一矩阵$[K]$，可表示为$[K]=[\bar{K}]+\triangle[K]$，则$[K]$的逆阵用 Neumann 级数可表示为：

$$[K]^{-1} = [\bar{K}]^{-1}(I - P + P^2 - P^3 + \cdots + (-1)^m P^m) \tag{1}$$

式中 $P = [\bar{K}]^{-1}\triangle[K]$； m 为正整数

由(1)式可以看到，这时求$[K]$阵的逆阵只需进行矩阵的乘法和加减法运算，而无需进行矩阵的分解，从而可以大大减少计算工作量。当$\triangle[K]$相对于$[\bar{K}]$为小量时，(1)式中只需取前二三项就可获得满意的结果。

2 非线性动力学方程的数值积分解法

一般地，非线性动力学方程可写作如下"拟线性"形式：

$$[M(x)]\{\ddot{x}\} + [c(x,\dot{x})]\{\dot{x}\} + [k(x)]\{x\} = \{F(t)\} \tag{2}$$

其中的广义质量阵$[M(x)]$，广义刚度阵$[K(x)]$以及广义阻尼阵$[c(x,\dot{x})]$依赖于系统的广义坐标和广义速度。对于这种形式的非线性动力学方程，可以用分段线性化的方法进行数值积分，即从系统初始条件 $x_0, \dot{x}_0$ 开始，根据以下方程进行计算：

$$[M(x_k)]\{\ddot{x}_{k+1}\} + [c(x_k,\dot{x}_k)]\{\dot{x}_{k+1}\} + [k(x_k)]\{x_{k+1}\} = \{F(t_{k+1})\} \tag{3}$$

也就是在$[t_k, t_k + \triangle t]$进域内，把系统的特征矩阵当作常阵，其元素由已知的 t_k 时刻的 x_k、$\dot{x}_k$ 确定，于是可用直接积分方法解出 $t_k + \triangle t$时刻的 诸运动量 x_{k+1}，$\dot{x}_{k+1}$ 和 $\ddot{x}_{k+1}$. 由于(3)式是一个近似表达式，因此 $t_k + \triangle t$ 时刻的解也是近似的，如果不进行修正，最后由于误差积累，经过若干步计算之后可能出现巨大的误差，因此在计算中需进行迭代修正，以保证最终的解具有足够精度。

现在，在对动力学方程进行数值分析的直接积分法中，较普遍采用的是 Newmark 方法与 Wilson-θ 法。

下面简要地说明一下 Newmarko 法的增量迭代步骤：

$$\ddot{x}_{t+\triangle t} = a_0\triangle x - a_2\dot{x}_t - a_3\ddot{x}_t \tag{4a}$$

$$\dot{x}_{t+\triangle t} = a_1\triangle x - a_4\dot{x}_t - a_5\ddot{x}_t \tag{4b}$$

$$x_{t+\triangle t} = \triangle x + x_t \tag{4c}$$

式中、右下标为该物理量对应的时刻。

系数为： $a_0 = 1/a(\triangle t)^2$， $a_1 = \delta/(a\triangle t)$， $a_2 = 1/(a\triangle t)$

$$a_3 = \frac{1}{(2a)} - 1, \quad a_4 = \delta/2 - 1, \quad a_5 = \frac{\triangle t}{2}(\delta/a - 2).$$

当 $\delta \geqslant 0.5$，$a \geqslant 0.25(0.5 + \delta)^2$ 时，Newmark 法是无条件稳定的。

将(4)式代入(3)式得： $$^*[K]_{t+\triangle t}\triangle x = {}^*\{F_{t+\triangle t}\} \tag{5}$$

式中： $$^*[K]_{t+\triangle t} = a_0[M]_{t+\triangle t} + a_1[c]_{t+\triangle t} + [K]_{t+\triangle t} \tag{6}$$

$$\{F_{t+\triangle t}\} = \{F_{t+\triangle t}\} + (a_2 x_t + a_3\ddot{x}_t)[M]_{t+\triangle t}$$

$$+ (a_4\dot{x}_t + a_5\ddot{x}_t)[c]_{t+\triangle t} - x_t[K]_{t+\triangle t} \tag{7}$$

由(5)式求解 $\triangle x$ 时，其中的质量阵，阻尼阵和刚度阵中含有 $t+\triangle t$ 时的 $x_{t+\triangle t}$ 和 $\dot{x}_{t+\triangle t}$，于是由(5)式得到 Newmark 增量迭代公式，记为：

$$^*[K]^{(i-1)}_{t+\triangle t}\triangle x^{(i)} = {}^*\{F_{t+\triangle t}\}^{(i-1)} \tag{8}$$

式中右上角表示一个时间步长内的迭代次数。

通常，在以迭代法为基础的增量求解过程中，每次迭代后，应检查得到的解是否收敛到预定的误差范围之内，可用如下判断准则：

$$\frac{\| \triangle x^{(i)} - \triangle x^{(i-1)} \|_2}{\| \triangle x^{(i)} \|_2} \leqslant \varepsilon \tag{9}$$

于是可得 Newmark 增量迭代法的具体迭代步骤为：

· 初始计算，即计算常数 $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$

1) 赋初值 $x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0$

2) 取 $\delta \geqslant 0.5, \alpha \geqslant 0.25(0.5+\delta)^2$，选定 $\triangle t, \varepsilon$

· 对每一时间步，做到步骤 8：

3) 令 $\triangle x^{(0)} = 0$

$$\ddot{x}^{(0)}_{t+\triangle t} = \ddot{x}_t, \qquad \dot{x}_{t+\triangle t} = \dot{x}_t, \qquad x^{(0)}_{t+\triangle t} = x_t$$

· 迭代　　$i = 1, 2, \cdots$

4) 计算　　$[M]^{(i-1)}_{t+\triangle t}, [c]^{(i-1)}_{t+\triangle t}, [K]^{(i-1)}_{t+\triangle t}, \{F_{t+\triangle t}\}^{(i-1)}$

5) 由(6)式和(7)式得到等效刚度阵 $^*[K]^{(i-1)}_{t+\triangle t}$，等效载荷 $^*\{F_{t+\triangle t}\}^{(i-1)}$

6) 求解(8)式，得到第 i 步的增量 $\triangle x^{(i)}$

7) 计算　　$x^{(i)}_{t+\triangle t}, \dot{x}^{(i)}_{t+\triangle t}, \ddot{x}^{(i)}_{t+\triangle t}$，即

$$x^{(i)}_{t+\triangle t} = \triangle x^{(i)} + x_t$$
$$\dot{x}^{(i)}_{t+\triangle t} = a_1\triangle x^{(i)} - a_4\dot{x}_t - a_5\ddot{x}_t$$
$$\ddot{x}^{(i)}_{t+\triangle t} = a_0\triangle x^{(i)} - a_2\dot{x}_t - a_3\ddot{x}_t$$

收敛判断

8) 计算 $a = \| \triangle x^{(i)} - \triangle x^{(i-1)} \|_2 / \| \triangle x^{(i)} \|_2$，若 $a \leqslant \varepsilon$，收敛转到步骤 3，进行下一时间步计算；若 $a > \varepsilon$，继续迭代，转到步骤 4。

3　Neumann 级数——Newmark 直接积分法

从第 2 节中，我们可以看到，非线性动力学方程的数值积分解法中，都要反复求解(5)式所示的线性方程组，并且 $^*[K]_{t+\triangle t}$ 是不断 变化的。我们知道在线性方程组的数值求解中，计算时间主要用于系数矩阵三角分解或者求逆，因此在非线性动力学方程的数值积分解法中，若能缩短线性方程组的求解时间，则可提高非线性动力学方程的求解效率。

在如第 2 节所述的非线性动力学方程的分段线性化在 Newmark 直接积分解法中，我们将(8)式的求解采用 Neumann 级数解法。从第 2 节的 Newmark 数值积分解法中，我们可以看到，对每一时间步，都要进行多次迭代，如果方程(8)式所示的 $^*[K]^{(i-1)}_{t+\triangle t}$ 是不断变化的，我们可从将 $^*[K]^{(i-1)}_{t+\triangle t}(i \geqslant 2)$ 看作是 $^*[K]^{(0)}_{t+\triangle t}$ 迭加上一小变化 $[\triangle K]^{(i-1)}_{t+\triangle t}$，即 $^*[K]^{(i-1)}_{t+\triangle t} = {}^*[K]^{(0)}_{t+\triangle t} + [\triangle K]^{(i-1)}_{t+\triangle t}$。

于是方程(8) 式变为：

$$\left([K]_{t+\Delta t}^{(0)} + [\triangle K]_{t+\Delta t}^{(i-1)}\right)\triangle x^{(i)} = {}^{*}\{F_{t+\Delta t}\}^{(i-1)} \tag{10}$$

利用 Neumann 级数可得：

$$\triangle x^{(i)} = \left([K]_{t+\Delta t}^{(0)}\right)^{-1}\left(I - P_{t+\Delta t} + P_{t+\Delta t}^{2} - P_{t+\Delta t}^{3} + \cdots(-1)^{m}P_{t+\Delta t}^{m}\right)\{F_{t+\Delta t}\}^{(i-1)} \tag{11}$$

式中：$P = \left([K]_{t+\Delta t}^{(0)}\right)^{-1}[\triangle K]_{t+\Delta t}^{(i-1)}$

实际计算中，一般只取 Neumann 级数的前 3 项即可获得足够精确的解。

参照第 2 节中非线性动力学方程的 Newmark 直接积分解法步骤，可以得到如下的对非线性动力学方程的 *neumann* 级数 ——Newmark 直接积分解法步骤如下：

· 初始计算

1) 赋初值 $x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0$

2) 取 $\delta \geqslant 0.5, \alpha \geqslant 0.25(0.5+\delta)^2$，选定 $\triangle t, \varepsilon$

· 对每一时间步，做到步骤 8

3) 令 $\triangle x^{(0)} = 0$

$$\ddot{x}_{t+\Delta t}^{(0)} = \ddot{x}_t, \quad \dot{x}_{t+\Delta t}^{(0)} = \dot{x}_t, x_{t+\Delta t}^{(0)} = x_t$$

· 迭代 $i = 1, 2, \cdots$

4) 计算 $[M]_{t+\Delta t}^{(i-1)}, [c]_{t+\Delta t}^{(i-1)}, [K]_{t+\Delta t}^{(i-1)}, \{F_{t+\Delta t}\}^{(i-1)}$

5) 由(6) 式和(7) 式得到等效刚度阵 ${}^{*}[K]_{t+\Delta t}^{(i-1)}$，等效载荷 ${}^{*}\{F_{t+\Delta t}\}^{(i-1)}$.

若 $i = 1$，记下 ${}^{*}[K]_{t+\Delta t}^{(0)}$

若 $i > 1$，计算 ${}^{*}[K]_{t+\Delta t}^{(i-1)}$，即 ${}^{*}[\triangle K]_{t+\Delta t}^{(i-1)} = {}^{*}[K]_{t+\Delta t}^{(i-1)} - {}^{*}[K]_{t+\Delta t}^{(0)}$

6) 对方程(8) 求解，得到第 i 步的增量 $\triangle x^{(i)}$

具体做法为：

若 $i = 1$，求出 ${}^{*}[K]_{t+\Delta t}^{0}$ 的逆阵，$({}^{*}[K]_{t+\Delta t}^{(0)})^{-1}$，并保存，且 $\triangle x^{(1)} = ({}^{*}[K]_{t+\Delta t}^{(0)})^{-1}\{F_{t+\Delta t}\}^{(0)}$

若 $i > 1$，利用(11) 式求 $\triangle x^{(i)}$

后面的第 7，第 8 步与第 2 节中相同。

在上面的解法中，由于利用了 Neumann 级数，所以要求$[\triangle K]$ 相对于$[\bar{K}]$ 为一小量，因此在每一时间步的反复迭代中，用第一步的等效刚度阵作为$[\bar{K}]$，其它迭代步的等效刚度阵看作是在第一步的等效刚度阵上有增量$[\triangle K]$，这样，在整个求解过程中，每一时间步上都需要作一次矩阵求逆计算，在实际运算中，我们可以选取一个固定的$[\bar{K}]$ 阵，例如取初始时刻的等效刚度阵为$[\bar{K}]$，其它时间步以及每一时间步上的平衡迭代中的等效刚度阵看作是$[\bar{K}]$ 上有增量 $\triangle[K]$，这样，整个过解过程中就只需作一次矩阵$[\bar{K}]$ 的求逆计算，从而可以更节省计算时间。显然这种方法对于弱非线性动力学方程是十分有效的，但是当 $\triangle[K]$ 相对$[\bar{K}]$ 不是小量时，需在 Neumann 级数中多取几项，否则会影响计算精度。

4 算　　例

如图 1 所示的一均匀等截面悬臂梁，长 $l = 900$ cm，截面惯性矩 $I_z = 5.30$ cm^4，重度 $r = 0.78 \times 10^{-2}$(kg/cm^2)；共分 9 个单元 10 个节点，并设第 ① 单元的弹性模量具有非线性特性：

$$E = 2.1 \times 10^6(1 + 1.0 \times V_2^2) \quad (\text{kg/cm}^2)$$

式中 V_2 为节点 2 沿 Y 方向的挠度(以 cm 计)；其余单元均为线弹性材料：$E = 2.1 \times 10^6 (\text{kg/cm}^2)$；在端点 10 沿 Y 方向加一阶跃力 $P(t)$，如图 2 所示。求悬臂梁的动力响应。

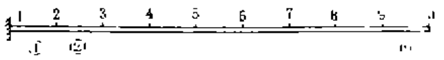

图 1　悬臂梁

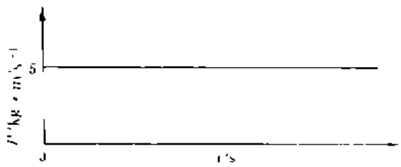

图 2　阶跃力

用 Newmark 增量数值积分方法和 Neumann 级数 —— Newmark 直接分法分别计算悬臂梁的动力响应。取 $\alpha = 0.25$，$\delta = 0.5$，$\triangle t = 0.02$ s，不计悬臂梁的阻尼，总共求解 140 步。为了比较 Neumann 级数解法的精度，表 1 列出了悬臂梁端点挠度响应值。

表 1　节点 10 的挠度响应值　(cm)

$t/\triangle t$	Newmark 增量迭代方法	Neumann 级数 —Newmark 直接积分方法
10	1.03532	1.03532
20	2.90577	2.90577
30	5.50511	5.50477
40	9.58865	9.58900
50	13.1914	13.1907
60	16.5135	16.5128
70	19.6517	19.7666
80	20.7675	20.9024
90	20.9890	21.0841
100	19.9208	20.3003
110	16.9073	17.3027
120	13.8701	14.0032
130	10.0687	10.1667
140	6.03127	6.13790

从表 1 可见，Neumann 级数 —— Newmark 直接积分解法，具有相当高的精度，它与通常用的 Newmark 增量迭代方法的解相比，误差不超过 2%．但是它具有高得多的效率，在本算例中，求解 140 步，用通常的 Newmark 增量迭代法，在 386 微机上用 CPU 时 300 秒，而用笔者提出的方法仅用 CPU 时 68 秒；即可提高计算效率 4 至 5 倍。而且系统自由度越大则本算法节省的机时越多，也越能体现本方法的优越性。用完全类似的步骤也可得到 Neumann 级数 —— Wilson-θ 直接积分解法等。

参 考 文 献

1　张汝清，殷学纲．计算结构动力学．重庆：重庆大学出版社，1987．116～150

2　凌复华，殷学纲．常微分方程的数值方法及其在力学中的应用．重庆：重庆大学出版社，1991．93～153，162～176

3　陈塑环．结构振动分析的矩阵摄动理论．重庆：重庆出版社，1991，208～211

4　Yamazaki F，Shinzuka M．Dasgupta G Neumann espansion for stachastu finite element analysis. J. Eugng. Mech ASCE. 1988，114(8)：1335～1354