

6 35-43

信号处理中的小波分析

Wavelet Analysis in the Signal Processing

秦树人
Qin Shuren

徐铭陶 ✓
Xu Mintao

杨昌棋
Yan Changqi

陈志奎
Cheng Zhikui

TN911.7

(重庆大学测试中心, 重庆, 630044; 第一作者 57岁, 男, 教授)

A 摘要 介绍了母小波和完全小波系的概念, 详述了它们的数字特征。给出了连续小波变换、离散小波变换和二进离散小波变换的定义并参考 R^2 空间的矢量表达式导出了它们的逆变换。

关键词 母小波; 完全小波系; 数字特征; 小波变换; 逆小波变换
中国图书资料分类法分类号 TH115

信息处理
小波分析

ABSTRACT The conceptions of mother wavelet and complete wavelet system are introduced. Their digital features are described in detail. The definitions of continuous, discrete, and dyadic discrete wavelet transforms are given, and their inverse transforms are deduced with reference to the vector expressions in R^2 space.

KEYWORDS mother wavelet; complete wavelet system; digital feature; wavelet transform; inverse wavelet transform

0 引 言

由于小波函数具局部化特性、多尺度性和“数学显微”(“变焦”)特性,使得小波变换很好的解决了非平稳信号分析的问题。从本文开始我们将陆续发表一系列有关小波分析在信号处理中的应用方面的研究成果。笔者将首先从信号处理的角度对小波分析作一简要的论述。

1 母小波

一实变量时间函数 $\psi(t)$ ($-\infty < t < \infty, t \in R$), 若其具衰减性和波动性即满足条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty \quad (\text{衰减性}) \quad (1)$$

* 收文日期 1995-11-03
国家自然科学基金资助项目

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt = 0 \quad (\text{波动性}) \quad (2)$$

时称为母小波函数。式中 $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ 为一平方可积函数。

例 1 函数

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \\ 0 & t \text{ 为其余} \end{cases} \quad (3)$$

式(3)称 Haar 母小波, 图象如图 1。

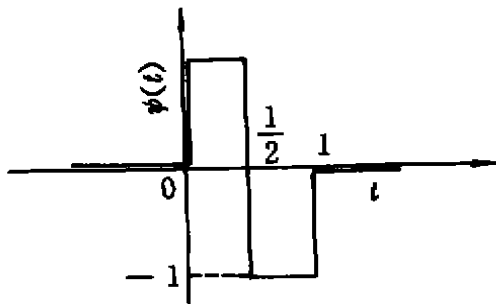


图 1 Haar 母小波

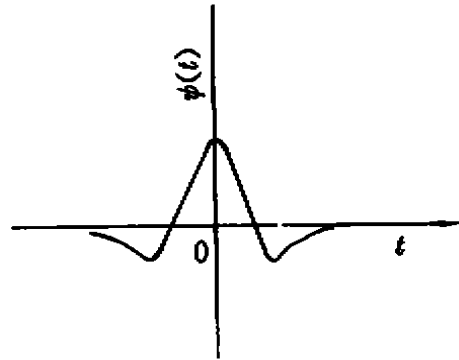


图 2 墨西哥帽状母小波

例 2 函数

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-\frac{1}{4}} (1 - t^2) e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad (-\infty < t < \infty) \quad (4)$$

称为墨西哥帽状母小波, 如图 2 所示。

若母小波可作富氏变换并记作 $\hat{\psi}(\omega)$, 则有

$$\hat{\psi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-i\omega t} dt \quad (5)$$

例如墨西哥帽状母小波的富氏变换为

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\omega) &= \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} [(1 - t^2) e^{-\frac{t^2}{2}}] e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-\frac{1}{4}} \omega^2 e^{-\frac{\omega^2}{2}} \end{aligned} \quad (6)$$

其图象如图 3 所示。

由式(6)和图 3 见, 墨西哥帽状母小波的富氏变换有 $\hat{\psi}(0) = 0$, $\hat{\psi}(\omega)$ 为一带通滤波器。 $\psi(t)$ 和 $\hat{\psi}(\omega)$ 的性态由如下数字特征描述。

$$L_{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} t |\psi(t)|^2 dt / \|\psi(t)\|^2 \quad (7)$$

$$\Delta_t = \left(\int_{-\infty}^{\infty} (t - t_c)^2 |\phi(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} / \|\phi(t)\| \quad (8)$$

式中 $\|\phi(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(t)|^2 dt \quad (9)$

$\|\phi(t)\|$ 是 $\phi(t)$ 的范数

$$\omega_c^+ = \int_{-\infty}^{\infty} \omega |\hat{\phi}(\omega)|^2 d\omega / \|\hat{\phi}(\omega)\|^2 \quad (10)$$

$$\Delta_\omega^+ = \left(\int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_c^+)^2 |\hat{\phi}(\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} / \|\hat{\phi}(\omega)\| \quad (11)$$

式中

$$\|\hat{\phi}(\omega)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(\omega)|^2 d\omega \quad (12)$$

$\|\hat{\phi}(\omega)\|$ 是 $\hat{\phi}(\omega)$ 的范数。这里我们称 (t_c, ω_c^+) 为 $\phi(t)$ 在时频坐标平面 otw 上的中心点； $\Delta_t \times \Delta_\omega^+$ 为 $\phi(t)$ 在 otw 平面上开的窗口，其中 Δ_t 为 $\phi(t)$ 的时宽， Δ_ω^+ 为频宽见图 4。

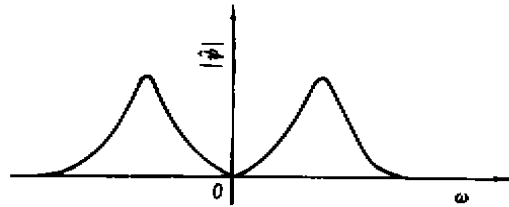


图 3 墨西哥帽状母小波的富氏变换

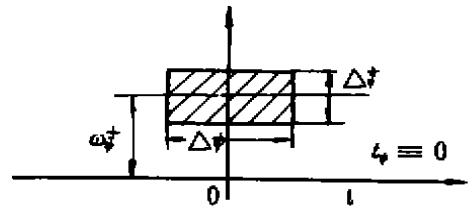


图 4 otw 平面上的窗口

这里约定 $t_c \equiv 0 \quad (13)$

显见，上述中心点和窗口描述了母小波函数在 otw 平面上局部化情况。

2 完全小波系

对母小波施以伸缩和平移可得展缩小波函数 $\phi_{a,b}(t)$ 为

$$\phi_{a,b}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}} \phi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad \begin{cases} a \in R^+, R^+ = R - 0 \\ b \in R \end{cases} \quad (14)$$

配入因子 $|a|^{-\frac{1}{2}}$ 使范数 $\|\phi_{a,b}\| = \|\phi\|$ 。式中 a 为伸缩因子， b 为平移因子，改变 a 或 b 或使 $\phi_{a,b}(t)$ 成为一函数系称为完全小波系。对完全小波系中任一小波函数都可引入其对应的中心点和窗口来描述其局部化状态。

若将 $\phi_{a,b}(t)$ 的中心点记为 $(t_{c,a}, \omega_{c,a}^+)$ ，窗口记为 $(\Delta_{t,a} \times \Delta_{\omega,a}^+)$ 并作如下定义

$$t_{\varphi_{a,b}} = \int_{-\infty}^{\infty} t |\varphi_{a,b}(t)|^2 dt / \|\varphi_{a,b}(t)\|^2 \quad (15)$$

$$\omega_{\hat{\varphi}_{a,b}} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega |\hat{\varphi}_{a,b}(\omega)|^2 d\omega / \|\hat{\varphi}_{a,b}(\omega)\|^2 \quad (16)$$

$$\Delta_{\varphi_{a,b}} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} (t - t_{\varphi_{a,b}})^2 |\varphi_{a,b}(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} / \|\varphi_{a,b}(t)\| \quad (17)$$

$$\Delta_{\hat{\varphi}_{a,b}} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_{\hat{\varphi}_{a,b}})^2 |\hat{\varphi}_{a,b}(\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} / \|\hat{\varphi}_{a,b}(\omega)\| \quad (18)$$

其中

$$\|\varphi_{a,b}(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_{a,b}(t)|^2 dt \quad (19)$$

$$\|\hat{\varphi}_{a,b}(\omega)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}_{a,b}(\omega)|^2 d\omega \quad (20)$$

注意到式(15)中,若 $a > 0$ 则有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} t |\varphi_{a,b}(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} t |a|^{-1} \left| \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} t \left| \psi\left(\frac{t}{a} - \frac{b}{a}\right) \right|^2 d\left(\frac{t}{a} - \frac{b}{a}\right) = b \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} \|\varphi_{a,b}(t)\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \psi\left(\frac{t}{a} - \frac{b}{a}\right) \right|^2 d\psi\left(\frac{t}{a} - \frac{b}{a}\right) = \|\psi(t)\|^2 \end{aligned}$$

故

$$t_{\varphi_{a,b}} = b \quad (21)$$

注意到

$$\hat{\varphi}_{a,b}(\omega) = |a|^{-\frac{1}{2}} e^{-i\omega b} \hat{\psi}(a\omega)$$

其中

$$\begin{aligned} |e^{-i\omega b}| &= 1 \\ \|\hat{\varphi}_{a,b}(\omega)\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |a|^{-\frac{1}{2}} e^{-i\omega b} \hat{\psi}(a\omega) |a|^{-\frac{1}{2}} e^{-i\omega b} \hat{\psi}(a\omega) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(a\omega) \hat{\psi}(a\omega) d(a\omega) = \|\hat{\psi}(\omega)\|^2 \end{aligned}$$

又

$$\int_0^{\infty} \omega |\hat{\psi}_{a,b}(\omega)|^2 d\omega = \int_0^{\infty} \omega a |\dot{\psi}(a\omega)|^2 \frac{1}{a} d(a\omega) = \omega_r^- \|\dot{\psi}(\omega)\|^2 / a$$

所以

$$\omega_{r_{a,b}} = \omega_r^- / a \tag{22}$$

可见

$$\psi_{a,b}(t) \text{ 的中心为 } (t_{r_{a,b}}, \omega_{r_{a,b}}) = (b, \omega_r^+ / a) \tag{23}$$

窗口为

$$\begin{aligned} \Delta_{r_{a,b}} &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} (t-b)^2 |\psi_{a,b}(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} / \|\psi_{a,b}(t)\| \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} a^2 \left(\frac{t-b^2}{a} \right) \cdot \frac{1}{a} \left| \dot{\psi} \left(\frac{t-b}{a} \right) \right|^2 \cdot a d \left(\frac{t-b}{a} \right) \right)^{\frac{1}{2}} / \|\dot{\psi}(t)\| \\ &= a \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{t-b^2}{a} \right) \left| \dot{\psi} \left(\frac{t-b}{a} \right) \right|^2 d \left(\frac{t-b}{a} \right) \right)^{\frac{1}{2}} / \|\dot{\psi}(t)\| \\ &= a \Delta_{\dot{\psi}} \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\omega_{a,b}} &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\omega - \frac{\omega_r^-}{a} \right)^2 |\hat{\psi}_{a,b}(\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} / \|\hat{\psi}_{a,b}(\omega)\| \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2} (a\omega - \omega_r^+)^2 a |\dot{\psi}(a\omega)|^2 \frac{1}{a} d(a\omega) \right)^{\frac{1}{2}} / \|\dot{\psi}(\omega)\| \\ &= \Delta_{\dot{\psi}} / a \end{aligned} \tag{25}$$

故窗口面积为

$$A_{\psi} = \Delta_{r_{a,b}} \times \Delta_{\omega_{a,b}} = \Delta_{\dot{\psi}} \times \Delta_{\dot{\psi}} = \text{const} \tag{26}$$

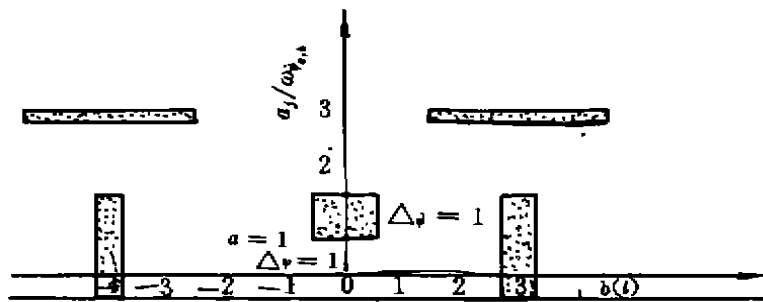


图 5 小波系的中心和窗口

仅由 $\psi(t)$ 决定而与 a, b 无关。

式(21)、(22)将 $onb(a > 0)$ 半平面满映到 $ot\omega(\omega > 0)$ 半平面,调整 a, b 可得到中心化于 $ot\omega(\omega > 0)$ 上任一点的小波函数,故称 $\psi_{a,b}(t)$ 为完全小波系。

$\Delta_{r_{a,b}}$ 与 $\Delta_{\omega_{a,b}}$ 依赖于参数 a 的变化如图 5 所示。低频域上 $\Delta_{r_{a,b}}$ 自动变宽, $\Delta_{\omega_{a,b}}$ 自动变窄。式(27)和(28)为墨西哥帽状母小波生成的完全小波系及其富氏变换

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{1/2} \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-1/4} \left[1 - \left(\frac{t-b}{a} \right)^2 \right] \exp \left[- \left(\frac{t-b}{a} \right)^2 / 2 \right] \quad (27)$$

$$\hat{\psi}_{a,b}(\omega) = |a|^{1/2} \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-1/4} (a^{-1}\omega)^2 e^{-(a^{-1}\omega)^2/2} \quad (28)$$

图 6(a), (b) 分别示出 $b=0$, a 取整数数值时 ψ_0 和 $\hat{\psi}_{a,0}(t)$ 和 $\hat{\psi}_{a,0}(\omega)$ 的时、频函数图象。

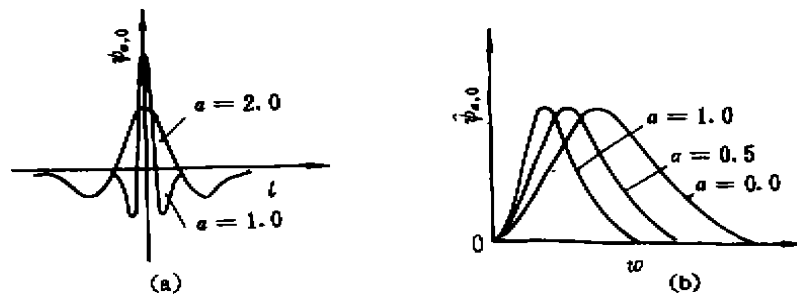


图 6 墨西哥帽状小波系的时频图

3 信号的连续小波变换^[3]

设信号 $f(t)$ 是 $L^2(R)$ 空间的元素, 即

$$f(t) \in L^2(R); \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \quad (29)$$

$f(t)$ 的连续小波正变换定义为

$$\begin{aligned} W_f(a,b) &= \langle f(t), \psi_{a,b}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \bar{\psi}_{a,b}(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) |a|^{-1/2} \bar{\psi} \left(\frac{t-b}{a} \right) dt \end{aligned} \quad (30)$$

由于给定 $\psi(t)$ 为实函数, 上式中 $\psi_{a,b}(t)$ 的共轭 $\bar{\psi}_{a,b}(t)$ 可用 $\psi_{a,b}(t)$ 代替。 $W_f(a,b)$ 是二元函数, 随母小波的选取而改变(见图 7(a)), 它亦可称为信号 $f(t)$ 在时频参数 a, b 域上的二维图像, 或叫做 $f(t)$ 在给定母小波下的时频谱密度。

试将 $W_f(a,b)$ 与信号的富氏变换 $\hat{f}(\omega)$ 作一比较, $\hat{f}(\omega)$ 是 $f(t)$ 在频域上的一柱图象。放在时频域上则为一维面, 见图 7(b), 这样的图象只有一张, 而 $W_f(a,b)$ 则是一般曲线且随 $\psi(t)$ 而异, 可见小波变换有更强的信号分析潜力。需要说明小波变换的信号分析潜力在连续小波逆变换建立之后方能充分展现。

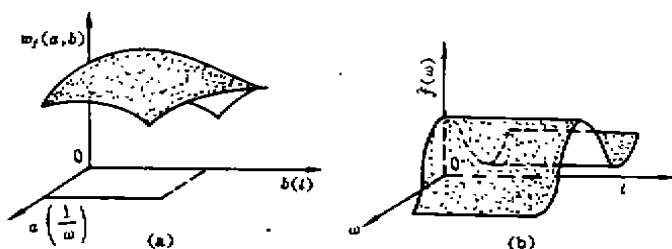


图 7 时频谱和富氏谱

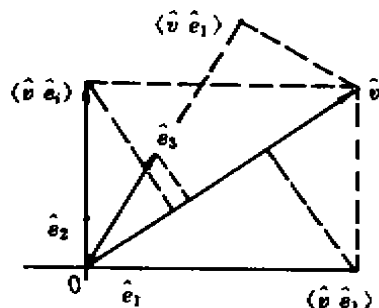


图 8 R^2 空间中的矢量表示

图 8 表示 R^2 空间的矢量 $\vec{v}, \hat{e}_1, \hat{e}_2$ 为 R^2 的正交标架(或基底), $\langle \vec{v}, \hat{e}_1 \rangle, \langle \vec{v}, \hat{e}_2 \rangle$ 分别为 \vec{v} 在 \hat{e}_1 和 \hat{e}_2 上的投影(内积), 由这二内积可表示出

$$\vec{v} = \langle \vec{v}, \hat{e}_1 \rangle \hat{e}_1 + \langle \vec{v}, \hat{e}_2 \rangle \hat{e}_2 \tag{31}$$

如果在 R^2 中再引入单位矢 \hat{e}_3 , 则 $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ 线性相关, 这时仍可用 $\langle \vec{v}, \hat{e}_i \rangle (i = 1, 2, 3)$ 表示 \vec{v} , 但它们必须加权 C_1, C_2, C_3 , 即有

$$\vec{v} = \sum C_i \langle \vec{v}, \hat{e}_i \rangle \hat{e}_i \tag{32}$$

推广上面的讨论可建立式(30)的逆变换式。

这里首先将 $\phi_{a,b}(t) (a, b \in R)$ 看作是 $L^2(R)$ 中的基矢, 它对应于 $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ 有连续统的势, 设 $\phi_{a,b}(t)$ 中含有 $L^2(R)$ 的标架, 并且对应于 \hat{e}_1, \hat{e}_2 是规范正交的, 故可推测信号 $f(t)$ 可以通过 $\langle f(t), \phi_{a,b}(t) \rangle$ 的加权积分表示出来, 于是便得到如式(33)所示的逆变换式

$$f(t) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{a^2 C_\psi} W_f(a, b) \phi_{a,b}(t) da db \tag{33}$$

式中

$$C_\psi = \int_{-\infty}^\infty |\omega|^{-1} |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega \tag{34}$$

为权因子。

式(33)作为连续小波逆变换式, 其正确性可将其代入式(30)和(34)并证明两者为恒等来加以检验。

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{|a|^{\frac{1}{2}}}{2\pi C_\psi} \int_{-\infty}^\infty \frac{da}{a^2} db \int_{-\infty}^\infty \hat{f}(\omega) e^{i\omega b} \hat{\psi}(a\omega) d\omega \cdot |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi C_\psi} \int_{-\infty}^\infty \frac{da}{a^2} \hat{f}(\omega) \hat{\psi}(a\omega) \int_{-\infty}^\infty \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) e^{i\omega b} db \cdot d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi C_\psi} \int_{-\infty}^\infty \frac{da}{a^2} \hat{f}(\omega) \hat{\psi}(a\omega) e^{i\omega t} \hat{\psi}(a\omega) \cdot |a| d\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi C_r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{|a|} |\hat{\psi}(a\omega)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\
 &= f(t) \cdot \frac{1}{C_r} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(a\omega)|^2 \frac{da}{|a|} = f(t) \frac{1}{C_r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(a\omega)|}{|a\omega|} da\omega \\
 &= f(t) \quad (\text{验毕})
 \end{aligned}$$

需要注意式(33)的运用必须满足条件

$$C_r < \infty \quad (35)$$

此条件称为母小波容许条件,选用母小波时应予以检查。

4 2 基离散小波变换

为了使完全小波系 $\{\psi_{m,n}(t); a, b \in R\}$ 含有 $L^2(R)$ 的规范正交标架,应对完全小波系加以限制,即令 $a = 2^m, b = n2^m$,于是 $\psi_{m,n}(t)$ 退化为

$$\begin{aligned}
 \psi_{m,n}(t) &= 2^{-\frac{m}{2}} \psi(2^{-m}t - n) \\
 m, n &\in Z
 \end{aligned} \quad (36)$$

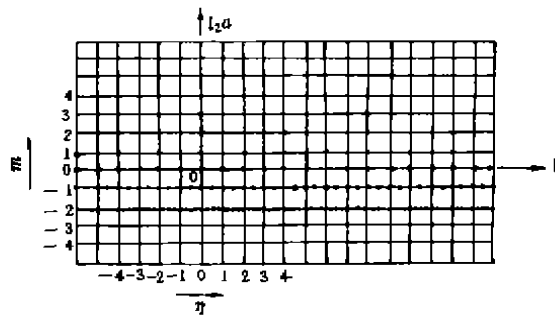


图9 参数平面上小波系的中心分布图

称为2-基离散小波系, m, n 叫做离散时频参数和 $\{\psi_{m,n}(t)\}$ 不同, $\{\psi_{m,n}(t)\}$ 不再具有连续统的势,而是可数无穷的。

$\{\psi_{m,n}(t)\}$ 的中心,在 omn 平面上为点 (m, n) 即网线交点,见图9,是均匀离散在 omn 的平面上,在 $0-l_2 a-b$ 平面上中心为 $(l_2 a, b)$,由图9中黑点表示,它们不再是均匀离散的, a 值越小,即频率越高时,中心分布越密,这特别有利于分析信号的高频成份。

将(36)代入(30),立即得出连续小波变换 $W_f(a, b)$ 在离散点 (m, n) 处的值

$$W_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{m,n}(t) dt \quad (m, n \in Z) \quad (37)$$

式(37)称为信号 $f(t)$ 的2-基离散小波正交换。

求2-基小波逆变换,比求连续小波逆变换要简结得多,因为可以不涉及加权的问题。

2-基离散小波系 $\{\psi_{m,n}(t); m, n \in Z\}$ 是 $L^2(R)$ 的空间完备小波系^[4], 即它们构成 $L^2(R)$ 的规范正交基:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{m,n}(t) \psi_{m,l}(t) dt = \begin{cases} 1 & n = l \\ 0 & n \neq l \end{cases} \quad (38)$$

$m, n, l \in Z$

由式(31)可写出 2-基离散小波逆变换式为

$$f(t) = \sum_{m,n \in Z} W_{m,n} \psi_{m,n}(t) \quad (39)$$

其正确性可检验于下: 以 $\psi_{m,r}(t)$ 乘以式(39) 并对 t 积分可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{m,r}(t) dt = \sum_{m,n \in Z} W_{m,n} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{m,n}(t) \psi_{m,r}(t) dt$$

由式(37)和(38)可知上式是恒等的, 故有 $W_{m,r} = W_{m,n}$. 这里称

$$f_m \{ \psi_{m,n}(t) | n \in Z \} \quad (40)$$

为 2-基子小波系, 由它张成的空间记为 W^m , 显然它是 $L^2(R)$ 的子空间或称 m 阶小波空间, 又称

$$f_m(t) = \sum_{n \in Z} W_{m,n} \psi_{m,n}(t) \quad (41)$$

为 2-基小波正变换 $\{W_{m,n}; n \in Z\}$ 对信号 $f(t)$ 的贡献, 于是式(39)可改写成

$$f(t) = \sum_{m \in Z} f_m(t) \quad (42)$$

寻求式(38)的 2-基离散小波系是小波分析的基本问题, 现已确知^[2], 存在时频域上同时具有良好局部化的母小波 $\psi(t)$, 由它生成的 2-基离散小波系(36)构成 $L^2(R)$ 的规范正交基。

从应用的角度看, 只要选用好母小波及由母小波生成的 2-基离散完备小波系, 就可运用式(37)和(41)及(42)对信号作小波分析了。

参 考 文 献

- 1 I. Daubechies, T. Paul. Wavelets and Application. Proc. of the V II th Interntional Congress of Mathematical Physics, M. Mebkhout and R. Seneor editors, World Seientific Pulbishers, 1987. 63~69
- 2 秦前清, 杨宗凯. 实用小波分析. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1994. 36~71
- 3 I. Daubechies. The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis. IEEE Trans. On Information Theory. 1990, 36(5), 961~1005
- 4 徐铭陶, 秦树人等, $L^2(R)$ 的多尺度逼近与小波正交分解. 重庆大学学报, 1966, 19(2), 1~9