

8 50-56

基于模糊病态性识别的自适应仿真算法*

Adaptive Simulation Algorithm Based on Fuzzy Stiffness Recognition

陈锐

Chen Rui

汪瑞芳

Wang Ruifang

(重庆大学电子信息工程学院, 重庆, 630044; 第一作者 25岁, 男, 硕士)

TP273.2

TP311.52

摘要 在已有病态性识别方法的基础上引入模糊集合理论, 构造准确性更高的识别方法, 并将它用在自适应仿真算法中。

关键词 病态系统; 自适应; 仿真算法; 模糊识别

中国图书资料分类法分类号 TP311.52; TP273.2

ABSTRACT Adaptive simulation algorithm is an effective and practical method for simulating stiff system, and the key to realize this algorithm is stiffness recognition. This paper, based on the previous recognizing methods, introduces fuzzy set theory in them to develop a more accurate approach which is successfully used in adaptive simulation algorithm.

KEYWORDS stiff system; adaptivity; simulation algorithm; fuzzy recognition

0 引 言

系统仿真是基于模型的活动, 仿真算法的本质是建立系统的行为产生器, 它是影响和决定系统仿真的精度、速度、稳定性的关键, 在仿真中起着极为重要的作用。病态(Stiff)系统是科研和工程实践中普遍存在的一类系统, 因其结构的特殊性和复杂性, 若用一般的数值积分方法(如 Adams 法、显式 Runge-Kutta 法), 由于积分步长只能限制在最小时间常数的数量级, 而系统的过渡过程却决定于最大的时间常数, 因此仿真过程必然耗费大量的机时, 造成仿真效率低下, 甚至可能由于舍入误差的大量积累而导致仿真失效。

目前比较有效的解决病态问题的数值方法有 Gear 算法、向后差分法、隐式及半隐式 Runge-Kutta 法等。但这类方法解决非病态问题的效率都低于 Adams 法和显式 Runge-Kutta 法。一般的病态系统, 其过渡过程又都存在一段非病态区, 而非线性病态系统的病态区和非病态区有时还是交替出现的。为提高仿真效率, 就要求在不同的区段用不同的方法进行仿真, 从而达到方法对过渡过程变化的自适应, 这就是所谓的自适应仿真算法^[2]。作为对比, 我们把适合仿真病态系统的一类仿真算法称为病态算法, 而把仿真非病态系统效率更高的算

* 收文日期 1995-06-26

本文为“八五”攻关课题项目

法称为非病态算法。

笔者在本文中从病态系统的概念着手,分析上述两类仿真算法在仿真病态系统存在的不适应性,强调自适应仿真算法的理论和实用意义;探讨自适应仿真算法实现的关键技术——病态性识别;注意到这一问题具有的模糊性,将模糊集合理论应用到病态性识别,成功地实现了基于模糊病态性识别的自适应仿真算法,并将该算法挂接到高级连续系统仿真语言 ACSL 中,取得了良好的效果。

1 病态系统及病态性的识别

1.1 病态系统

按 Lambert 的数学定义^[4],给定常微方程组

$$\dot{y} = f(y, t) \quad y, t \in R^n \quad (1)$$

若以下二条件成立,则用上述方程组描述的系统就是病态系统。

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & \operatorname{Re} \lambda_i < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ \text{II} \quad & (\max |\operatorname{Re} \lambda_i|) / (\min |\operatorname{Re} \lambda_i|) = S \gg 1 \end{aligned}$$

其中 λ_i 是系统的 Jacobi 矩阵 $\partial f / \partial y$ 的特征值, S 称作病态比。

下面我们从数值计算的角度探讨一下非病态算法仿真病态系统的情形。从病态系统的定义不难看出,病态系统中既有相对较小的 $|\lambda_{\min}|$,又有较大 $|\lambda_{\max}|$, $e^{|\lambda_{\max}|t}$ 分量主宰着解的初始阶段,此时解变化剧烈,无论是稳定性还是精度都要求用小步长计算。当它衰减到足够小以后, $e^{|\lambda_{\min}|t}$ 分量开始对解起决定作用,解的变化趋于平缓。从精度上看,此时可以适当放大步长,但由于稳定性的限制,步长的大小仍只能由 $|\lambda_{\max}|$ 决定,稳定性限制了步长的放大。而系统过渡过程的长短却由 $|\lambda_{\min}|$ 决定,结果造成用很小的步长积分一个很大的过渡过程,这一方面使计算过程极为冗长,效率十分低下;另一方面使舍入误差大量积累,当误差超过某个限度时,计算结果就会发散,从而导致仿真失败。

从上述分析看出,非病态算法对病态系统的不适应性表现在解的慢变化阶段,即在这一阶段它受稳定性的限制不能按精度要求放大步长。但是,病态算法对快变化阶段的仿真效率很低。病态算法基本上都是隐式算法,每仿真一步需要计算一次系统的 Jacobi 矩阵、一次矩阵求逆以及几次迭代运算,计算量很大。而在快变阶段,解变化剧烈,为满足精度要求,病态算法也只能用小步长计算。由于它的计算量比非病态算法大得多,而所用步长相差无几,因此这一阶段病态算法反而比非病态算法的计算花费更大。从提高仿真性能的角度讲,病态算法对快变阶段是不合适的。由此可得出这样的结论:不论是病态算法还是非病态算法,求解病态系统时均存在局部不适应,尤其当病态系统为非线性的,且状态变量大量耦合,其解将是快变段和慢变段交替出现,对这样的系统,上述两类算法效果都不好。

解决问题的最好办法是,充分利用两类算法的适应性而避开各自的不适应性。具体地说,在病态系统的快变阶段,用非病态算法进行仿真,一旦系统运行至慢变阶段,马上切换到病态算法。如果快变阶段和慢变阶段交替出现,就交替使用两种算法,这样就能保证总是用合适的方法进行仿真,从而减少了仿真时间,提高了仿真效率。

这种能自动与(快、慢变)阶段相匹配的仿真算法我们称之为自适应仿真算法。仿真算法自适应思想的提出为病态算法的研究提出了一个很有前途的发展方向,具有较强的实际意义。

1.2 病态性识别

自适应仿真算法实现的关键是所选择的两种算法能根据过渡过程不同的变化区段进行切换,算法何时切换是这里的主要问题。一般说来,病态系统解的性态大致可分为两种,即非病态和病态。如果有一种方法能识别出这两种性态,则算法“何时切换”的问题就能得到解决。我们把这种识别方法称为病态性识别,下面介绍一种较实用的识别方法——谱半径估计法^[1]。

谱半径估计法就是把按精度要求定出的步长 h_c 和按稳定半径与谱半径的比值求出的临界步长 h_s 进行比较以识别病态性。考虑(1)式所描述的系统,设 ρ 为系统 Jacobi 矩阵 $J = \partial f / \partial y$ 的谱半径(即 J 阵特征值之模的最大值),当我们用非病态算法仿真该系统时,只有

$$\rho \cdot h < r \quad (2)$$

才能保证计算稳定(这里 h 为计算步长, r 为算法的稳定半径),也即

$$h < r / \rho \quad (3)$$

所以,算法临界稳定的计算步长

$$h_s = r / \rho \quad (4)$$

再将实际计算时按精度要求定出的步长 h_c 与 h_s 比较,若

$$h_c < h_s$$

那么病态性还没有出现,一旦 h_c 等于或大于 h_s 了,我们马上可以判断稳定性限制了步长放大,说明病态性已经出现。反之,用病态算法仿真时,若发现 h_c 比 h_s 小很多,则表明病态性已经消失。

计算 h_s 的关键是必须正确估计出 Jacobi 矩阵的谱半径 ρ 。若已知 Jacobi 矩阵 J , 由于 $\rho \leq \|J\|$, 我们可以直接估算如下:

$$\rho = \|J\|$$

$\|J\|$ 是 Jacobi 矩阵的某一范数,为了节省计算量通常可用 L_1 或 L_∞ 范数。病态算法通常都会用到 Jacobi 矩阵,因此采用这种方法识别病态性不会增加很多计算量,完全能满足在线识别的需要。

2 病态性识别中模糊论方法的引入

从上一节的分析看到,病态性出现的时机是任意的,按快、慢变区间对病态区和非病态

区的划分是模糊的,识别过程也存在不确定性。例如用谱半径估计法识别时,按 1.2 节所述,“若发现 h_n 比 h_c 小很多时则表明病态性已经消失”。实际上,非病态时 h_n 在小于 h_c 的某一范围内变化,它使得我们在做上述结论时无法用一个精确的数字来划定界限。本节试图将模糊集合理论引入病态性识别,从另一途径来构造病态性识别方法。

2.1 模糊识别系统的数学模型

简单地讲,模糊识别系统是一单输入单输出(SISO)系统,其框图如图 1 所示。

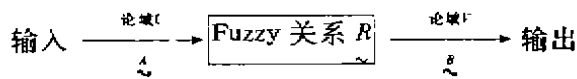


图 1 模糊识别系统框图

下面以谱半径估计法为例,对图 1 进行解释:

论域 U 为描述 h_n/h_c 大小的 n 个值,如取

$$U = \{0.2, 0.5, 0.8, 1, 3, 5\}$$

论域 V 为 m 种待识别性态:

$$V = \{NN, NS, US, SS, VS\}$$

其中 NN 表示严重非病态(解变化最迅速的阶段)

NS 表示非病态(快变阶段)

US 表示不确定状态(不能准确判别,需继续观察)

SS 表示病态(慢变阶段)

VS 表示严重病态(解变化最慢的阶段)

按照一般人的思维模式和实际操作经验,有一些大略的判定原则,例如

若 h_n 稍大于或等于 h_c ,则为病态

若 h_n 稍小于 h_c ,则为不确定状态

若 h_n 比 h_c 小得多,则为非病态

...

下面对人的判别经验作模糊数学的加工。为称呼方便,我们不妨把 h_n 和 h_c 的比值(h_n/h_c)称作观测值,而病态、非病态等待识别性态称作结论值。

1) 观测值和结论值

观测值:描述 h_n 和 h_c 的大小关系。

对它只需做模糊度量,可引用下述一些模糊字眼:很大(VB)、约等于(EQ)、稍小(SL)、很小(VL)、极小(VV)。它们都是些模型量,都可以适当地规定。根据实测数据和经验,不妨按表 1 定义:

论域 U 的数值是根据 h_n/h_c 的大小适当划分而得。分级的目的是将论域离散化,便于运算。

结论值:结论值实际上是将一系列待识别性态模糊化的结果。按表 2 定义:

表 1

模糊量	论 域					
	0.2	0.5	0.8	1	3	5
	隶 属 度					
VB	0	0	0	0	0.06	1
EQ	0	0	0.5	1	0	0
SL	0	0.5	1	0.7	0	0
VL	0.5	1	0.5	0	0	0
VV	1	0.5	0	0	0	0

表 2

模糊量	论 域				
	NN	NS	US	SS	VS
	隶 属 度				
FVS	0	0	0	0.1	1
FSS	0	0	0.5	1	0
FUS	0	0.5	1	0.5	0
FNS	0.5	1	0.5	0	0
FNN	1	0.5	0	0	0

2) 判别规则

根据人的经验,可给出如下规则:

if VB, then FVS

if EQ, then FSS

if SL, then FUS

if VL, then FNS

if VV, then FNN

这些语言判别规则是一个多段条件句,根据模糊集合论的知识,它可以表示成从 U 到 V 的模糊关系 R :

$$R = (VB \times FVS) \cup (EQ \times FSS) \cup (SL \times FUS) \cup (VL \times FNS) \cup (VV \times FNN) \quad (5)$$

经运算,得到

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.06 & 0.06 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 1 \end{bmatrix}$$

当得到观测值 $A \in \mathcal{S}(U)$ 时,通过 R 可以得到结论值 B

$$B = A \cdot R \tag{6}$$

有了模糊关系矩阵 R ,就可按下述步骤进行模糊识别:

I Fuzzy 化,即将精确的观测值 h_i/h_n 模糊化。

II Fuzzy 推理,将 Fuzzy 化的观测值代入式(6)。这是一个模糊推理的过程。

III Fuzzy 决策。Fuzzy 推理的结果是一个 F 子集,它反映了系统的实际性态和论域 U 中五种特定性态的相似程度。通过最大隶属度法等决策方法,可将 F 子集精确化,从而得到确切的结果。

例如,经 Fuzzy 化的观测值

$$A = (0, 0, 0.5, 1, 0, 0)$$

则

$$B = A \cdot R = (0.5, 0.5, 0.5, 1, 0)$$

按照最大隶属度原则进行 Fuzzy 决策,由于

$$\mu_B(SS) = 1$$

故识别结果为 SS,即系统“病态”。

3 实例验证

下列常微方程组是 Enright^[6] 给出的五类验证病态算法的典型方程组之一——Uan der Pol 方程。

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 & y_1(0) &= 2 \\ \dot{y}_2 &= 40(1 - y_1^2)y_2 - y_1 & y_2(0) &= 0 \\ 0 &\leq t \leq 200 \end{aligned}$$

先用该例来验证模糊病态性识别方法的准确性。用列表的方式将一般的病态性识别方法和模糊识别方法进行比较,比较时段为 0~100 s。

表 3

t	0.2	0.6	10	31.2	32.3	32.8	33	65.1	65.8
maxe	119.7	118.4	100.9	16.68	6.52	18.70	120.2	11.34	4.8
mine	0.013	0.014	0.017	0.35	2.10	5.94	0.217	0.694	4.08
FRS	*				*		*		*
RS		*		*			*	*	
t	66	67	98.5	99.1	99.5	100			
maxe	12.77	118.7	9.44	5.20	99.7	119.4			
mine	5.002	0.014	0.99	3.69	11.3	0.014			
FRS		*		*		*			
RS		*	*			*			

表3中, t 为积分时刻,maxe和mine分别是该系统特征值之模的最大值和最小值;FRS一栏中的*号为模糊识别方法判定的算法切换时刻;RS中的*号为一般方法判定的切换时刻。可以发现,模糊识别方法对算法切换的时机把握得更加准确。

本算法已由作者挂接到世界流行的高级连续系统仿真语言ACSL中。通过验证大量的实例并和ASCL提供的最佳病态算法——Gear算法比较,发现该算法的仿真效率已大大提高。下面给出本例用常规比较项进行计算比较的结果。

表4

	T	S_n	F_n	J_n	I_n
Gear 算法	8.623	326	728	209	209
自适应算法	3.995	29	563	142	103

T :计算时间, S_n :总的计算步数, F_n :计算右端函数次数, J_n :求Jacobi矩阵次数, I_n :矩阵求逆次数。

给定误差容限为 10^{-4} ,在AST 386SX/20机上完成。

4 结束语

综上所述,将模糊集合理论引入系统病态性识别而建立的基于模糊病态性识别的自适应仿真算法是一种具有更高识别准确性的高效实用的病态系统仿真算法。该算法能根据系统过渡过程在快变区和慢变区的特征自动识别系统的非病态性和病态性,从而选择出与之相适应的非病态算法或病态算法。大量的仿真实例证明,该算法具有普遍的实用性,尤其对过渡过程为快、慢变交替出现的一类非线性病态系统的仿真效果最好。

参 考 文 献

- 1 熊光楞,宋安澜. 数字仿真中的病态探测和积分方法的自动切换. 信息与控制,1985,(2):12~18
- 2 李旺尧. 关于求解常微初值问题的自适应技术. 数值计算及计算机应用,1990,(1):54~58
- 3 Shampine L F. Detecting Stiffness with the Fehlberg(4,5) Formulars. Computer. & Math. with Apples,1977. 3
- 4 Lambert J d. Stiffness in Gladwell, I & Sayers, D. K. ed, Computational Techniques for Ordinary Differential Equations, ACADEMIC Press, 1980
- 5 W H Enright, T E Hull, B Linberg. 常微分方程刚性组数值方法的比较. 计算机应用与应用数学,1975,(3):1~14
- 6 陈锐. 基于模糊病态性识别的自适应仿真算法研究. 重庆大学自动化系硕士学位论文,1995