(11) 67-73

双侧区间松弛法的进一步研究*

A Further Study on Two-sided Interval Relaxation Method

杨万年　　黄德才
Yang Wannian　　Huang Decai
（重庆大学应用数学系，重庆，630044；第一作者 58 岁，男，教授）

O241.7

A **摘　要**　给出一种解非线性方程组的区间松弛法，其条件比有关文献的条件弱，但得出了同样的结论。此外，还给出了解存在的两个充分条件以及收敛速度比较定理，并给出一种选取较"大"的非负、非奇异左下逆矩阵 P 以使收敛速度加快的方法。

关键词　非线性方程组；区间迭代方法；松弛法；
中国图书资料分类法分类号　O241.7

ABSTRACT　An interval relaxation method to solve system of nonlinear equations is discussed in this paper. The conditions is weaker than the related reference. But the conclusion is the same. Besides, two sufficient conditions are given for the existence of solutions. A speed comparasion theorem is prsented, too. Finally, an illustrative example is also given.

KEYWORDS　system of nonlinear equations; interval iteration method; relaxation method

0　引　言

在文[3]中研究了如下方程组

$$f(x) = 0, \qquad x \in R^n \tag{1}$$

的双侧区间松弛解法，其中 $f(x)$ 是从 R^n 到 R^n 的连续映射。它要求函数 $f(x)$ 满足：

$$f(y) - f(x) \leqslant A(y - x), \qquad x^0 \leqslant x \leqslant y \leqslant y^0 \tag{2}$$

并要求矩阵 A 存在非负逆矩阵 P. 然而，这是一个非常强的条件。通常只有象 M-矩阵那样特殊的矩阵才有非负逆。因此，该方法的适用范围受到了极大地限制。在考虑问题(1)的求解问题时，为了更加实用，我们提出了一个较一般的条件，至多只要求(2)中的 A 存在非负满秩的左下逆。由于一般的矩阵都存在非负满秩的左下逆，而不一定存在非负逆，故条件较弱，但笔者得出了文[3]中同样的结论。此外，还给出了(1)有解和无解的两个充分条件以及收敛速度的比较定理。并给出了一个选择较"大"非负左下逆使收敛速度更快的分法。

有关区间分析的基本概念均可在[5]中找到，这里不于赘述。在下面的讨论中，我们将用到序区间 $\langle x, y\rangle = \{u | x \leqslant u \leqslant y, u, x, y \in R^n\}$ 和如下的区间算子：

* 收文日期　1994-03-01

$$R\langle x,y\rangle = \langle x-\omega Pf(x), y-\omega Pf(y)\rangle \tag{3}$$

其中：$\omega \in (0,1]$，$P \geqslant 0$，$P \in L(R^0)$ 且非奇异。

1 基本定理

定理 1 设 $f(x)$ 在 $\langle x^0,y^0\rangle$ 上连续且存在非负，满秩的矩阵 $P \in L(R^0)$，使 $f:R^0 \to R^0$ 的 $f(x)$ 满足：

$$P(f(y)-f(x)) \leqslant y-x, \text{当 } x^0 \leqslant x \leqslant y \leqslant y^0 \tag{4}$$

1) 若 $R\langle x^0,y^0\rangle \cap \langle x^0,y^0\rangle = \varnothing$，则 $f(x)=0$ 在 $\langle x^0,y^0\rangle$ 上无解。

2) 若 $R\langle x^0,y^0\rangle \subseteq \langle x^0,y^0\rangle$ 则

① $f(x)=0$ 在 $\langle x^0,y^0\rangle$ 上有解。

② 设 $\langle x^{k-1},y^{k-1}\rangle = R\langle x^k,y^k\rangle$，$\langle x^*,y^*\rangle = \bigcap_{k=0}^{\infty}\langle x^k,y^k\rangle$，则 $f(x)=0$ 在 $\langle x^0,y^0\rangle$ 上的任何解 z^* 有 $z^* \in \langle x^*,y^*\rangle$.

证明：1) 由于(1) 之解等价于

$$x = r(x) = x-\omega Pf(x), \qquad \omega \in (0,1]$$

的解，且当 $x^0 \leqslant x \leqslant y \leqslant y^0$ 时有：

$$\begin{aligned}&(y-\omega Pf(y))-(x-\omega Pf(x))\\ &= (y-x)-\omega P(f(y)-f(x)) \geqslant (1-\omega)(y-x) \geqslant 0\end{aligned}$$

∴ 可定义区间算子(3).

当 $x \in \langle x^0,y^0\rangle$ 时，$R\langle x,x\rangle = r(x)$

∴ $R\langle x,y\rangle$ 是 $r(x)$ 在 $\langle x^0,y^0\rangle$ 上的区间扩张。

又设 $\langle x',y'\rangle \subseteq \langle x,y\rangle$，则

$$\begin{aligned}&x'-\omega Pf(x')-(x-\omega Pf(x))\\ &= (x'-x)-\omega P(f(x')-f(x)) \geqslant (1-\omega)(x'-x) \geqslant 0\end{aligned}$$

同理有：

$$y'-\omega Pf(y')-(y-\omega Pf(y)) \leqslant 0$$

$$\therefore \quad R\langle x',y'\rangle \subseteq R\langle x,y\rangle$$

即：$R\langle x,y\rangle$ 是 $r(x)$ 在 $\langle x^0,y^0\rangle$ 上的具有包含单调性的区间扩张。

∴ 若 $R\langle x^0,y^0\rangle \cap \langle x^0,y^0\rangle = \varnothing$，则(1) 在 $\langle x^0,y^0\rangle$ 内无解。否则，设 $f(x)=0$ 在 $\langle x_0,y_0\rangle$ 内有解 $x^* \in \langle x^0,y^0\rangle$，由 $R\langle x,y\rangle$ 之包含单调性可知：

$$x^* = r(x^*) \in R\langle x^0,y^0\rangle$$

$$\therefore \quad x^* \in R\langle x^0,y^0\rangle \cap \langle x^0,y^0\rangle \neq \varnothing$$

这同假定 $R\langle x^0,y^0\rangle \cap \langle x^0,y^0\rangle = \varnothing$ 矛盾．∴ 1) 成立。

2) ① ∵ $R\langle x,y\rangle$ 是 $r(x)$ 的具有包含单调性的区间扩张，且 $R\langle x^0,y^0\rangle \subseteq \langle x^0,y^0\rangle$，所以对任

何 $x \in \langle x^0, y^0 \rangle$ 均有 $r(x) \in R\langle x^0, y^0 \rangle \subseteq \langle x^0, y^0 \rangle$. 即 $r(x)$ 是映 $\langle x^0, y^0 \rangle$ 到它自身的连续映射。由 Brouwer 不动点原理可知：$r(x)$ 在 $\langle x^0, y^0 \rangle$ 上有不动点 z^*.

又 $\because P \in L(R^n)$ 非奇异且 $\omega \neq 0$. $\therefore z^*$ 是(1) 在 $\langle x^0, y^0 \rangle$ 上的解。

② $\because \langle x^1, y^1 \rangle = R\langle x^0, y^0 \rangle \subseteq \langle x^0, y^0 \rangle$

由 $R\langle x, y \rangle$ 的包含单调性可知：对 $R = 0, 1, 2, \cdots$ 有

$$\langle x^{k+1}, y^{k+1} \rangle \subseteq \langle x^k, y^k \rangle$$

$\therefore$ 必有 $x^*, y^* \in \langle x^0, y^0 \rangle$ 且 $x^* \leqslant y^*$ 使

$$\langle x^*, y^* \rangle = \bigcap_{k=0}^{\infty} \langle x^k, y^k \rangle$$

设 z^* 是 $f(x) = 0$ 在 $\langle x^0, y^0 \rangle$ 上的任意解，则

$$z^* = r(z^*) \in R\langle x^0, y^0 \rangle = \langle x^1, y^1 \rangle$$

用归纳法可知，对 $k = 0, 1, 2, \cdots$，有

$$z^* \in \langle x^k, y^k \rangle$$

$\therefore z^* \in \langle x^*, y^* \rangle = \bigcap_{k=0}^{\infty} \langle x^k, y^k \rangle$. 即 2) 成立。

推论 1　设 $f(x)$ 在 $\langle x^0, y^0 \rangle$ 上连续且有 $A \in L(R^n)$，使

$$f(y) - f(x) \leqslant A(y - x), \text{当 } x^0 \leqslant x \leqslant y \leqslant y^0 \text{ 时} \tag{5}$$

若 A 存在非负、满秩的左下逆 $P \in L(R^n)$，则定理 1 的结论均成立。

推论中的矩阵 A 还可减弱为 $A(x, y)$. 只要当 $x^0 \leqslant x \leqslant y \leqslant y^0$ 时，有非负、满秩的 P 使 $PA(x, y) \leqslant I$，则结论同样成立。此外，我们还有

定理 2　若定理 1 的 2) 成立，还有 $Q \in L(R^n)$ 使

$$P(f(y) - f(x)) \geqslant Q(y - x), \quad x^0 \leqslant x \leqslant y \leqslant y^0 \tag{6}$$

且

$$\rho(I - \omega Q) < 1 \tag{7}$$

则方程(1) 在 $\langle x^0, y^0 \rangle$ 上存在唯一解 z^*，而且对于任何 $z^0 \in \langle x^0, y^0 \rangle$，由迭代

$$z^{k+1} = z^k - \omega P f(z^k), \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

产生的序列 $\{z^k\}$ 都有 $\lim_{k \to \infty} z^k = z^*$

证明:因为对定理 1 中的$\langle x^{k-1},y^{k+1}\rangle \subseteq \langle x^k,y^k\rangle$

有

$$y^{k-1} - x^{k-1} = y^k - x^k - \omega P(f(y^k) - f(x^k))$$
$$\leqslant (I - \omega Q)(y^k - x^k) \leqslant (I - \omega Q)^{k-1}(y^0 - x^0)$$

又由(7) 可知： $\lim\limits_{k\to\infty}(I - \omega Q)^k = 0$. ∴ 有

$$\lim_{k\to\infty}(y^k - x^k) = 0$$

再由 P 的非奇异性，(1) 在$\langle x^0,y^0\rangle$ 上有唯一解 $z^0 \in \bigcap\limits_{k=0}^{\infty}\langle x^k,y^k\rangle$. 事实上，对任意的 $z^* \in \langle x^0,y^0\rangle$，由 z^k 的定义和算子 R 的性质有

$$z^1 = z^0 - \omega Pf(z^0) = r(z^0) \in R\langle x^0,y^0\rangle \subseteq \langle x^0,y^0\rangle$$

由归纳法易证： $z^k \in \langle x^k,y^k\rangle, k = 0,1,2,\cdots$. 所以有 $|z^k - z^*| \leqslant y^k - x^k$，因此：$\lim\limits_{k\to\infty} z^k = z^*$.

若由(3) 定义的 $R\langle x,y\rangle$ 满足：$R\langle x^0,y^0\rangle \supseteq \langle x^0,y^0\rangle$，则只要我们用 $F(x) = -f(x)$ 代替定理 1 和 2 中的 $f(x)$，上面之讨论仍然成立。

若 $R\langle x^0,y^0\rangle \not\subseteq \langle x^0,y^0\rangle$ 且 $R\langle x^0,y^0\rangle \not\supseteq \langle x^0,y^0\rangle$，这时由上面的定理，我们得不出任何结论。因此有

定理 3 设 $f(x)$ 在$\langle x^0,y^0\rangle$ 上连续且(4) 式成立，又设 $R\langle x^0,y^0\rangle \not\supseteq \langle x^0,y^0\rangle$，令

$$\langle x^{k-1},y^{k-1}\rangle = R\langle x^k,y^k\rangle \bigcap \langle x^k,y^k\rangle \tag{8}$$

则 ① 若有 $N > 0$，使 $R\langle x^N,y^N\rangle \bigcap \langle x^N,y^N\rangle = \varnothing$，则(1) 在$\langle x^0,y^0\rangle$ 上无解。

② 若存在 $N > 0$ 使下列条件之一满足：

a) $R\langle x^N,y^N\rangle \bigcap \langle x^0,y^0\rangle \subseteq \langle x^N,y^0\rangle$

b) $R\langle x^N,y^N\rangle \bigcap \langle x^0,y^0\rangle \subseteq \langle x^0,y^N\rangle$

则(1) 在$\langle x^0,y^0\rangle$ 上有解。且当 $k = 0,1,2,\cdots$ 时，下面两个迭代序列：

对于 a)： $z^{k-1} = z^k - \omega Pf(z^k) \qquad z^0 = x^N$

对于 b)： $z^{k+1} = z^k - \omega Pf(z^k) \qquad z^0 = y^N$

均收敛于(1) 在$\langle x^0,y^0\rangle$ 上的一个解。

证明：① 用反证法。设 z^* 是(1) 在$\langle x^0,y^0\rangle$ 上的解。因(4) 成立，由定理 1 的证明可知：$R\langle x,y\rangle$ 是 $r(x) = x - \omega Pf(x)$ 的具有单调包含性质的区间扩张。∴ $z^* = r(z^*) \in R\langle x^0,y^0\rangle$. 即：

$$z^* \in R\langle x^0,y^0\rangle \bigcap \langle x^0,y^0\rangle = \langle x^1,y^1\rangle$$

设 $z^* \in \langle x^k,y^k\rangle$，则 $z^* = r(z^*) \in R\langle x^k,y^k\rangle$. ∴ $z^* \in \langle x^{k-1},y^{k+1}\rangle$，由归纳法可知：

$$z^* \in \langle x^k,y^k\rangle, \qquad k = 0,1,2,\cdots$$

由此可知：$R\langle x^N,y^N\rangle \bigcap \langle x^N,y^N\rangle = \langle x^{N-1},y^{N+1}\rangle \neq \varnothing$，这和已知矛盾。故 ① 成立。

② a) 设存在 $N > 0$ 使 $R\langle x^N,y^N\rangle \bigcap \langle x^0,y^0\rangle \subseteq \langle x^N,y^0\rangle$. 下面用归纳法证明：对 $k = 0,1,2,\cdots$

$$\langle x^{N+k+1}, y^{N-k-1}\rangle \cap \langle x^0, y^0\rangle \subseteq \langle x^{N+k}, y^0\rangle \tag{9}$$

∵ $$\langle x^{N+1}, y^{N-1}\rangle \cap \langle x^0, y^0\rangle = R\langle x^N, y^N\rangle \cap \langle x^N, y^N\rangle \cap \langle x^0, y^0\rangle$$
$$\subseteq \langle x^N, y^0\rangle \cap \langle x^N, y^N\rangle \subseteq \langle x^N, y^0\rangle$$

∴ $k = 0$ 时，(9) 成立。

设 $k \geqslant 0$ 时(9) 式成立，则 $k+1$ 时：

$$\langle x^{N+k+2}, y^{N-k-2}\rangle \cap \langle x^0, y^0\rangle$$
$$= R\langle x^{N+k+1}, y^{N-k-1}\rangle \cap \langle x^{N+k+1}, y^{N-k-1}\rangle \cap \langle x^0, y^0\rangle$$
$$\subseteq R\langle x^{N+k+1}, y^{N-k-1}\rangle \cap \langle x^{N+k+1}, y^0\rangle \subseteq \langle x^{N+k+1}, y^0\rangle$$

所以(9) 对一切 $k = 0,1,2,\cdots$ 均成立。

∴ $$x^0 \leqslant x^{N+k} \leqslant x^{N+k+1} \leqslant y^0 \qquad k = 0,1,2,\cdots$$

因此： $$\lim_{k\to\infty} x^{N+k} = z^* \in \langle x^0, y^0\rangle$$

又由 $\langle x^{k+1}, y^{k+1}\rangle = R\langle x^k, y^k\rangle \cap \langle x^k, y^k\rangle$ 和 $k \geqslant N$ 时，$x^k \leqslant x^{k+1}$ 知：

$$x^{k+1} = x^k - \omega P f(x^k) \qquad k \geqslant N$$

由 $f(x)$ 的连续性和 P 的非奇性质有：

$$\lim_{k\to\infty} f(x^{N+k}) = f(z^*) = 0 \qquad \therefore ② \; a) \text{ 成立}$$

同理可证 $b)$ 时也成立。

推论 2　设定理 3 的条件成立，且(6) 和(7) 也成立，若由(8) 定义的 $\langle x^k, y^k\rangle$ 当 $N > 0$ 使

$$R\langle x^N, y^N\rangle \subseteq \langle x^N, y^N\rangle$$

则(1) 在 $\langle x^N, y^N\rangle$ 上有唯一解。

证明：由定理 2 即得。

2　速度分析

定理 4　设 $f(x)$ 满足定理 1 之条件，$\bar{P}$ 是另一个使(6) 成立且 $P \leqslant \bar{P}$ 的非负满秩矩阵，记

$$\bar{R}\langle x, y\rangle = \langle x - \omega\bar{P}f(x), y - \omega\bar{P}f(y)\rangle$$
$$\langle \bar{x}^{k+1}, \bar{y}^{k+1}\rangle = \bar{R}\langle \bar{x}^k, \bar{y}^k\rangle, \qquad \langle \bar{x}^0, \bar{y}^0\rangle = \langle x^0, y^0\rangle$$

当 $R\langle x^0, y^0\rangle \subseteq \langle x^0, y^0\rangle$ 时，则对固定的 $\omega \in (0,1]$ 有

$$\langle \bar{x}^k, \bar{y}^k\rangle \subseteq \langle x^k, y^k\rangle \qquad k = 0,1,2,\cdots \tag{10}$$

证明：∵ $\langle \bar{x}^0, \bar{y}^0\rangle = \langle x^0, y^0\rangle$，　∴ $k = 0$ 时(10) 成立。

设 $k \geqslant 0$ 有 $\langle \bar{x}^k, \bar{y}^k\rangle \subseteq \langle x^k, y^k\rangle$，则 $k+1$ 时：由定理 1 知：

$$R\langle x^k, y^k\rangle \subseteq \langle x^k, y^k\rangle$$

∴ $$\bar{x}^{k+1} - x^{k+1} = \bar{x}^k - x^k + \omega P f(x^k) - \omega\bar{P}f(\bar{x}^k)$$
$$\geqslant \bar{x}^k - x^k + \omega\bar{P}(f(x^k) - f(\bar{x}^k))$$

$$=(1-\omega)(\bar{x}^k-x^k)\geqslant 0$$

同理可证明：
$$\bar{y}^{k+1}-y^{k+1}\leqslant 0$$

$\therefore$ $\langle\bar{x}^k,\bar{y}^k\rangle\subseteq\langle x^k,y^k\rangle \quad k=0,1,2,\cdots\cdots$ 证毕

同样，对固定 P 和不同的参数 ω，又有

定理 5 设 $f(x)$ 满足定理 1 的条件，对使(4)成立的固定 P，取 $\omega_1,\omega_2\in(0,1]$，$\omega_1\leqslant\omega_2$. 令

$$R^i\langle x,y\rangle=\langle x-\omega_iPf(x),y-\omega_iPf(y)\rangle \qquad i=1,2$$
$$\langle x_i^{k+1},y_i^{k+1}\rangle=R^i\langle x_i^k,y_i^k\rangle \qquad i=1,2$$

若

$$R^i\langle x^0,y^0\rangle\subseteq\langle x^0,y^0\rangle$$

则

$$\langle x_2^k,y_2^k\rangle\subseteq\langle x_1^k,y_1^k\rangle \qquad k=0,1,2,\cdots$$

证明：其证明方法类似于定理 4.

从以上两个定理可知：要使收敛速度较快，我们要选择较大的 ω 和 P. 由于推论 1 是常用的结论，如何选择较大的非负满秩的左下逆矩阵 P 使收敛较快，变得十分重要。为此有：

定理 6[5] P^0 是 A 的一个非负左下逆，则

1) $P^{k+1}=(2I-P^kA)P^k \qquad k=0,1,2,\cdots$

都是 A 的非负左下逆，且 $P^k\leqslant P^{k+1}$

2) 又若 P^0 满秩，且使 $(I-P^0A)$ 的特征根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 有 $\lambda_i^m\neq-1$，其中 $i=1,2,\cdots,n$，$m=1,2,\cdots$

则 1) 中的 $P^k(k=0,1,2,\cdots)$ 都是满秩的。

证明：其证明见[5].

3 数值例子

设

$$f(x)=\begin{pmatrix}3x_1-x_2^2-1\\-x_1^2+4x_2-1\end{pmatrix} \qquad x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in R^2$$

求 $f(x)=0$ 在 $\langle x^0,y^0\rangle$ 中之解。其中：$x^0=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，$y^0=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，取

$$P_1=\begin{pmatrix}0.3&0\\0&0.2\end{pmatrix} \qquad Q_1=\begin{pmatrix}0.9&0.6\\0.4&0.8\end{pmatrix}$$

$$P_2=\begin{pmatrix}1/3&0\\0&1/4\end{pmatrix} \qquad Q_2=\begin{pmatrix}1&-2/3\\-2/3&1\end{pmatrix}$$

易证：$P_i(f(y)-f(x))\leqslant y-x \qquad i=1,2$

$P_i(f(y)-f(x))\geqslant Q_i(y-x) \qquad i=1,2,x^0\leqslant x\leqslant y\leqslant y^0$

且 $\rho(I-Q_i)<1 \qquad i=1,2$

因此 $f(x)=0$ 在 $\langle x^0,y^0\rangle$ 上有唯一解 z^*，且对于任意 $z^0\in\langle x^0,y^0\rangle$，$z^{k+1}=z^k-P_if(z^k)$ $i=1,2$ 都收敛到这个解 z^*. 以下是取不同的 P_1 和 P_2 时对应序列的比较结果。($z^*=$

$(0.35991366, 0.28238446)^T$)

（Ⅰ）取 $z^0 = (0,0)^T, \omega = 1$

	① $P_1 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}$		② $P_2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$	
	z_1^k	z_2^k	z_1^k	z_2^k
$k=3$	0. 354 169 2	0. 274 992 8	0. 359 053 5	0. 281 358 51
$k=7$	0. 359 857 55	0. 282 313 59	0. 359 912 68	0. 282 383 29
$k=11$	0. 359 913 64	0. 282 383 44	0. 359 913 66	0. 282 384 46
$k=14$	0. 359 913 64	0. 282 384 44		
$k=16$	0. 359 913 66	0. 282 384 46		

（Ⅱ）取 $z^0 = (0.4, 0.5)^T, \omega = 1$

	① $P_1 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}$		② $P_2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$	
	z_1^k	z_2^k	z_1^k	z_2^k
$k=3$	0. 364 609 09	0. 288 229 12	0. 362 028 4	0. 282 646 47
$k=7$	0. 359 959 13	0. 282 441 89	0. 359 916 1	0. 282 384 76
$k=10$	0. 359 915 07	0. 282 386 24	0. 359 913 66	0. 282 384 48
$k=11$	0. 359 914 10	0. 282 385 02	0. 359 913 66	0. 282 384 46
$k=16$	0. 359 913 66	0. 282 384 46		

分析：在以上 Ⅰ）和 Ⅱ）中，当我们用各自的 1）和 2）比较时，可发现 2）中所出现的序列均比 1）中的收敛得快，注意到有 $P_1 \leqslant P_2$ 且 $\omega = 1$，因此同定理 4 的结论一致。即：P 越大，其收敛速度越快。

在 Ⅱ）中，由于 $z^0 = (0.4, 0.5)^T, f(z^0) = (-0.05, 0.84)^T$

$\therefore f(z^0) \ngeq 0, f(z^0) \nleq 0$，因此[4]中的方法不能求出 $f(x) = 0$，在 (x^0, y^0) 的解。但这里却收敛较快。这充分说明定理 2 的重要性。

参 考 文 献

1 游兆永，陈小君．解非线性方程组的两侧逼近区间迭代法．工程数学学报，1986(1)：26～30

2 游兆永，陈小君．两侧逼近区间松弛法．科学通报，1986(4)：241～243

3 廖鸿志．解非线性方程组的区间松弛法：[学位论文]．云南：云南大学数学系．1989

4 Ortega J M, et al. Iterative Solution of Nonlimear Equations in Several Variables. Academic press, 1970

5 黄德才，杨万年．解非线性方程组的单侧逼近方法．重庆大学学报，1989(3)：76～82