

16 23-29

数字信号二进小波变换 的滤波器与边界失真

The Filter and Boundary Problem on Digital
Dyadic Wavelet Transform

TN713

田逢春
Tian Fengchun

金吉成
Jin Jichen

(重庆大学无线电系,重庆,630044;第一作者33岁,男,副教授,博士)

摘要 讨论了由小波变换精确重建原信号的充要条件以及滤波器系数的不精确对重建信号的影响。采用 Daubechies 紧支集规范正交小波基,推导了二进小波变换滤波器不满足边界对称条件时能精确重建原信号的范围,也讨论了边界误差及其消除的方法,实验结果证实了所得的结论。

关键词 滤波器; 重建 / 小波变换; 边界

中国图书资料分类法分类号 TN713

ABSTRACT This paper discusses the sufficient and necessary condition and the effect of the inaccuracy of filter coefficients on the reconstructed signal. As an illustration, the Daubechies' normal orthogonal bases of compactly supported wavelets are used in deriving the range of accurate reconstruction when the boundary symmetry is not satisfied. The problem about boundary error and its elimination are also discussed. Experiment results have verified the conclusions.

KEYWORDS filter; reconstruction / wavelet transform; boundary

1 问题的引出

对于一个给定的数字信号 $\{d_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2$ 可以证明: 存在着连续信号 $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ 使 $d_n = f * \varphi_n(x)$, 其中 $\varphi(\cdot)$ 是小波变换中多分辨分析的尺度函数, “*”代表卷积, 记

$$\varphi_j(x) = 2^{-j}\varphi(2^{-j}x), \psi_j(x) = 2^{-j}\psi(2^{-j}x)$$

$$S_j f(x) = f * \varphi_j(x) = \int f(t) 2^{-j} \varphi(2^{-j}(x-t)) dt$$

$$W_j f(x) = f * \psi_j(x) = \int f(t) 2^{-j} \psi(2^{-j}(x-t)) dt \quad (1)$$

这里 $\psi(x)$ 为小波基函数, 则 $S_j f(x), W_j f(x)$ 分别称为连续函数 $f(x)$ 的多分辨分析和二进小波变换, 当 x 取离散值 $n \in \mathbb{Z}$ 时, $W_j f(x)$ 称为数字信号 $\{d_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ 的第 j 级离散二进小波变换。

设 $\hat{\varphi}(\omega), \hat{\psi}(\omega)$ 分别代表 $\varphi(x), \psi(x)$ 的富氏变换, 则 $\hat{\varphi}(\omega), \hat{\psi}(\omega)$ 应满足

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(2\omega) &= H(\omega)\hat{\varphi}(\omega) \\ \hat{\psi}(2\omega) &= G(\omega)\hat{\psi}(\omega)\end{aligned}\quad (2)$$

由(2)式可推得小波变换的递推算法:

$$\begin{aligned}S_j f(x) &= \sum_{t \in x} h_t S_{j-1} f(x - 2^{j-1}t) \\ W_j f(x) &= \sum_{t \in x} g_t S_{j-1} f(x - 2^{j-1}t) \quad j = 1 \sim J\end{aligned}\quad (3)$$

(2)(3)式中 $H(\omega), G(\omega)$ 为共轭镜像滤波器, $H(\omega) = \sum_{t \in x} h_t e^{-i\omega t}, G(\omega) = \sum_{t \in x} g_t e^{-i\omega t}$

当(3)式中 x 取离散值 $x = n, n \in z$ 时, 得到离散信号小波变换的递推公式:

$$\begin{aligned}S_j f(n) &= \sum_{t \in z} h_t S_{j-1} f(n - 2^{j-1}t) \\ W_j f(n) &= \sum_{t \in z} g_t S_{j-1} f(n - 2^{j-1}t) \quad j = 1 \sim J\end{aligned}\quad (4)$$

约定当 $j = 0$ 时的 $S_0 f(n) = d_n$; 由小波变换重建原信号的反变换公式为:

$$S_{j-1} f(n) = \sum_{t \in z} \bar{h}_t S_j f(n + 2^{j-1}t) - \sum_{t \in z} \bar{g}_t W_j f(n + 2^{j-1}t) \quad (5)$$

由于实际进行计算时 n 是取有限值, 不妨取 $0 \sim L-1$ 的 L 个整数并记作 $n \in [0, L-1]$, 需要说明的是, Mallat 塔式算法中每次滤波后要进行 $2:1$ 亚抽样, 而为了便于比较各级变换的信号, (4)式未进行亚抽样。在实验中发现, 对于 h_t, g_t, d_n 的取值区间是有限长的情形, 用公式(5)重建的信号不一定与原信号精确相等, 尤其是在原信号的跃变处和边界附近, 产生很大的失真, 这对信号分析、识别和数据压缩是非常不利的, 因为信号的跃变处携带有原信号很重要的特征信息, 例如, 在图像中, 它代表了图像的轮廓边缘。根据小波变换的 Mallat 塔式算法和多分辨分析思想, 小波变换最终体现在滤波器对信号的滤波上。分析失真的原因主要有下面两个:

- 1) 滤波器不满足精确重建条件
- 2) 滤波器不满足边界对称性条件

下面公式推导中, 对任一复函数 f , 用 \bar{f} 表示 f 的共轭; $|f|$ 表示 f 的模; i 表示复数 $\sqrt{-1}$ 。

2 精确重建的条件及其检验

由于 x 取值 $n \in Z$, 由 $S_j f(x)$ 及 $W_j f(x)$ 精确重建原信号 $S_0 f(x)$ 的充要条件是:

$$|H(\omega)|^2 + |G(\omega)|^2 = 1 \quad (6)$$

$$H(\omega) \overline{G(\omega)} + H(\omega + \pi) \overline{G(\omega + \pi)} = 0 \quad (7)$$

当取 $G(\omega) = -\overline{H(\omega + \pi)}e^{-i\omega}$ 时(6)(7)式化简为:

$$|H(\omega)|^2 + |G(\omega + \pi)|^2 = 1 \quad (8)$$

因此可用(6)(7)式或(8)式作为判定能否由小波变换精确重建原信号的一个充要条件。而对于文献[1]的情形, 其重建公式变为:

$$S_{j-1} f(n) = \sum_{t \in z} \bar{h}_t S_j f(n - 2^{j-1}t) + \sum_{t \in z} \bar{g}_t W_j f(n - 2^{j-1}t)$$

判定其精确重建原信号的必要条件为:

$$|H(\omega)|^2 + K(\omega)G(\omega) = 1 \quad (9)$$

这里给出两种小波函数滤波的实验结果,第一种是 Daubechies 紧支集规范正交基当 $N=4$ 时的情形, $G(\omega) = -\overline{H(\omega + \pi)}e^{-i\omega}$, 即 $g_i = (-1)^{i-1}h_{i-1}$, 其 $\sqrt{2}h_i$, $\sqrt{2}g_i$ 的取值如表中所示。

Daubechies 小波滤波器系数 $\sqrt{2}h_i$ 及 $\sqrt{2}g_i$ 的取值表

i	$\sqrt{2}h_i$	i	$\sqrt{2}g_i$	i	$\sqrt{2}h_i$	i	$\sqrt{2}g_i$
0	0.230 377 813 309	1	0.230 377 813 309	4	-0.187 034 811 719	-3	-0.187 034 811 719
1	0.714 846 570 553	0	-0.714 846 570 553	5	0.030 841 381 836	-4	-0.030 841 381 836
2	0.630 880 767 930	-1	0.630 880 767 930	6	0.032 883 011 667	-5	0.032 883 011 667
3	-0.027 983 769 417	-2	0.027 983 769 417	7	-0.10 597 401 785	-6	0.010 597 401 785

输入信号 $d_n = \begin{cases} \sin(2\pi - \pi/4) & 0 \leq n < (3/8)L \\ 1 & (3/8)L \leq n < (1/2)L \\ \sin(n) & (1/2)L \leq n < L \end{cases}$

输入信号、重建信号及二者之差的波形图示于图 1, 可见除边界附近外, 在其他区域都能够精确重建原信号。

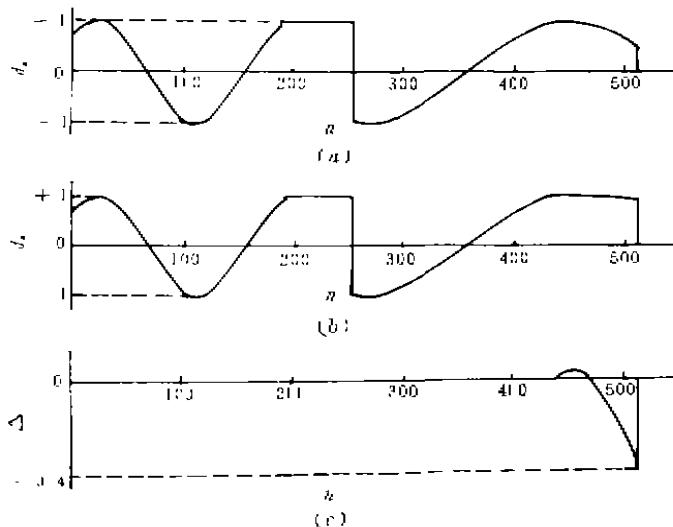


图 1 原始信号(a),由 Daubechies 滤波器得到的重建信号(b)及二者之差(c)

第二种滤波器取自文献[1], $h_{-1} \sim h_2$ 分别为 0.125, 0.375, 0.375, 0.125; $g_0 \sim g_1$ 分别为 -2.2; $h_{-3} \sim h_2$ 分别为 0.007 812 5, 0.054 685, 0.171 875, -0.171 875, -0.005 468 5, -0.007 812 5; 其原始输入信号、重建信号及二者之差示于图 2。

由图 2 可见重建信号在信号跃变处产生了寄生振荡, 而图 1 则没有, 这是因为图 1 所采用的 h_i 的富氏变换 $H(\omega)$ 满足(8)式, 而图 2 的 $H(\omega)$ 、 $G(\omega)$ 、 $K(\omega)$ 不完全满足(9)式, 此时 $|H(\omega)|^2 + K(\omega)G(\omega)$ 是一个在 1 附近波动的复数, 因而不能精确重建原信号。

从图 1 和图 2 中可看到, 虽然第一种滤波器在信号跃变处重建的信号优于第二种滤波器, 但在边界处, 第一种滤波器的结果却大大劣于第二种, 其原因是它不满足边界对称条件。

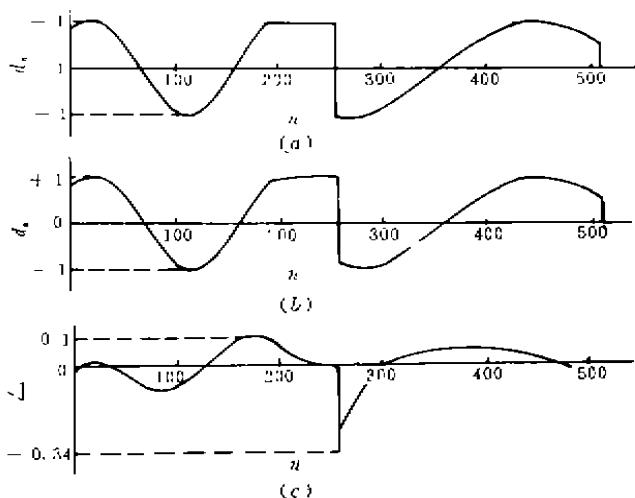


图 2 原始信号(a),由第二种滤波器得到的重建信号(b) 及二者之差(c)

3 边界对称性条件

在有限长信号小波变换中,为了比较不同小波基的特性,往往要选用不同的小波基,它们有的满足边界对称条件,有的则不满足,例如本文中第一种情况的 Daubechies 小波的 $H(\omega)$ 不满足边界对称条件,因而得到的小波变换结果有很大的边界误差。为了研究信号的某些特征(如观察图 1 中信号突变处的性能),只有在没有边界误差的区域得出的结果才是准确的,否则便无法区别到底是信号本身的特性还是由边界失真造成的错误结论。因此,有必要求出边界失真的最大范围。

此外,为了用小波变换实现数据压缩,必须使各级小波变换后的数据总量之和不超过原始输入信号 $s_{0,f}(n) = d_n, n \in [0, L-1]$, 的数据个数 L , 众所周知, 长度分别为 L 的输入信号 d_n 与长度为 L_1 的滤波器 h , 卷积后总长度应为 $L + L_1 - 1$, 也就是说, 总长度只可能增加而不会减少。但如果 d_n 是长度 L 的周期信号或周期为 $2L$ 但满足:

$$d_n = \begin{cases} d_{-n} & n < 0 \\ d_{2L-n-1} & L \leq n < 2L \end{cases} \quad (10)$$

则卷积后的输出信号周期仍不改变。为减小边界误差, 有 5 种对边界进行延拓的方法^[2], 但常用的有两种, 一种是对 $\{d_n\}_{n \in [0, L-1]}$ 进行周期延拓, 另一种是按(10)式对其进行对称周期延拓。文献[3]指出大多数情况下选用对称周期延拓的性能更优于周期延拓。但需要注意的是经过 h , 卷积后的 $s_{0,f}(n)$ 不一定再是边界对称的, 只有当

$$H(\omega) = \overline{H(\omega)} \quad \text{或等价地} \quad \bar{h}_{-n} = h_n \quad (11)$$

满足时, $s_{0,f}(n)$ 才具有对称周期性质, 因此称式(11)为边界对称性条件。实际上式(11)意味着 $H(\omega)$ 的相位为零, 或等价地, h_n 对称于 $n = 0$ 点。

可以验证, 上面第二种小波变换的 $H(\omega), G(\omega), K(\omega)$ 是线性相位的, 经适当处理后(见下节)可使其满足边界对称性条件, 因此在边界处的误差(实际上由不满足精确重建条件引起)远小于信号突变处的误差, 而第一种小波变换在边界处有明显的误差, 因它不满足边界对称条件。当 h, g 不满足边界对称条件时, 为了推导受边界不对称影响的区域, 不妨以

Daubechies 紧支集规范正交小波基为例, 此时, h_i 的 $i \in [0, 2N-1]$, g_i 的 $i \in [-2N+2, 1]$, a_n 的 $n \in [0, L-1]$.

$H(\omega) = \left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right)^N P(e^{-i\omega})$, 将式(4)(5) 重写如下:

$$S_j f(x) = \sum_{l=0}^{2N-1} h_l S_{j-1} f(n - 2^{j-1}l) \quad (12)$$

$$W_j f(n) = \sum_{l=-2N+2}^1 g_l S_{j-1} f(n + 2^{j-1}l) \quad j = 1 \sim J \quad (13)$$

$$S_{j-1} f(n) = \sum_{l=0}^{2N-1} \bar{h}_l S_j f(n + 2^{j-1}l) + \sum_{l=-2N+2}^1 \bar{g}_l W_j f(n + 2^{j-1}l) \quad (14)$$

若每次变换后都只保留 $n \in [0, L-1]$ 的 L 个变换结果, 则从(12)(13)式可见, 当 $n < 2^{j-1}l$ 或 $n \geq L + 2^{j-1}l$ 时都将假定前一级变换结果 $S_{j-1} f(n)$ 具有边界对称性, 因此这些 $S_j f(n)$ 都是不可靠的, 令

$$n_L = \max_{j \in [1, J-1], l \in [0, 2N-1] \cup [-2N+2, 1]} \{2^{j-1}l\}_{j, l} = 2^{J-1}N - 2^{J-2}$$

$$n_R = \min_{j \in [1, J-1], l \in [0, 2N-1] \cup [-2N+2, 1]} \{L + 2^{j-1}l\}_{j, l} = L - 2^{J-1}(N-1)$$

在重建原信号时若 $n < -2^{j-1}l$ 或 $n \geq L + 2^{j-1}l$ 时, 也要分别假定 $S_j(n)$ 、 $W_j(n)$ 具有边界对称性, 令

$$n_{RL} = \max_{j \in [1, J], l \in [0, 2N-1] \cup [-2N+2, 1]} \{2^{j-1}l\}_{j, l} = 2^J N - 2^J$$

$$n_{RR} = \min_{j \in [1, J], l \in [0, 2N-1] \cup [-2N+2, 1]} \{L - 2^{j-1}l\}_{j, l} = L - 2^J(N-2)$$

$$N_L = \max\{n_L, n_{RL}\} = 2^J N - 2^J, \quad N_R = \min\{n_R, n_{RR}\} = L - 2^J N + 2^{J-1}$$

因此, 能够精确重建原信号的最小范围应是 $[N_L + 1, N_R - 1]$.

实验发现, 当信号相关性很强, 例如, 在边界附近等于常数时, 即使滤波器不满足边界对称条件, 重建信号在边界附近也没有误差, 因此, 为了避免信号自身相关性的影响, 使结果具有普遍性, 我们采用了长度 $L = 512$, 均匀分布于 $[-0.5, 0.5]$ 的白噪声信号作实验, 其结果示于图 3. 这里 $J = 3, L = 512, N = 4$, 因此 $N_L = 112, N_R = 400$ 需要注意, 图中误差的范围约小于我们推导的范围, 这是因为文中推导的是可能的最大范围之故。

对于二维可分离小波变换的情形, 类似地可推出其精确重建原信号的区域为 $[N_L + 1, N_R - 1] \times [N_L + 1, N_R - 1]$

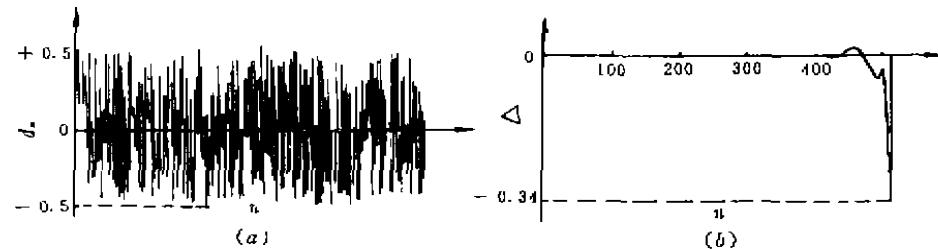


图 3 白噪声原信号(a)以及它与小波变换后重建信号之差(b)

4 边界误差的消除

4.1 不进行亚抽样时边界误差的消除

设每次变换后都只保留 $0 \sim L-1$ 的 L 个数据, 若 $H(\omega)$ 、 $G(\omega)$ 、 $K(\omega)$ 是线性相关的, 即: $H(\omega) = |H(\omega)|e^{i\omega\tau}$, $G(\omega) = |G(\omega)|e^{i\omega\tau}$, $K(\omega) = |K(\omega)|e^{-i\omega\tau}$, 其中 τ 为常数, 为了使边界对称性条件(11)得到满足, 令

$$H_1(\omega) = H(\omega)e^{-i\omega\tau}, G_1(\omega) = G(\omega)e^{-i\omega\tau}, K_1(\omega) = K(\omega)e^{-i\omega\tau} \quad (15)$$

若 $H(\omega)$ 、 $G(\omega)$ 、 $K(\omega)$ 满足精确重建条件, 则不难验证 $H_1(\omega)$ 、 $G_1(\omega)$ 、 $K_1(\omega)$ 仍然满足, 且又满足边界对称条件(11), 因此可在数据长度有限的情况下按上述方法消除重建信号在边界附近的误差, 式(15)的时域形式为: $h_1(l) = h(l-\tau)$, $g_1(l) = g(l-\tau)$, $k_1(l) = k(l+\tau)$, 代入(12)~(14)式并化简后得到

$$S'_j f(n) = \sum_{l \in U} h_1(l) S_{j-1} f(n - 2^{j-1}l) \quad (16)$$

$$W'_j f(n) = \sum_{l \in V} g_1(l) S_{j-1} f(n - 2^{j-1}l) \quad (17)$$

$$S_{j-1} f(n) = \sum_{l \in U} \bar{h}_1(l) S'_j f(n - 2^{j-1}l) + \sum_{l \in V} \bar{k}_1(l) W'_j f(n + 2^{j-1}l) \quad (18)$$

$$S_j f(n) = S'_j f(n + 2^{j-1}\tau) \quad (19)$$

$$W_j f(n) = W'_j f(n - 2^{j-1}\tau) \quad (20)$$

其中 U 、 V 、 Q 分别为 $h_1(l)$ 、 $g_1(l)$ 、 $k_1(l)$ 不为零的区间, 式(16)~(19)的物理意义在于: 若分别用 $H_1(\omega)$ 、 $G_1(\omega)$ 、 $K_1(\omega)$ 代表 $H(\omega)$ 、 $G(\omega)$ 、 $K(\omega)$ 进行滤波后, 只需对滤波结果移位 $2^{j-1}\tau$, 就得到实际的小波变换结果 $W_j f(n)$ 和多分辨分析 $S_j f(n)$, 在重建时可由 $S'_j f(n)$ 、 $W'_j f(n)$ 恢复 $S_{j-1} f(n)$, 从而可在数据长度有限的情况下消除重建信号在边界附近的误差。

上面第二种情况是 $H(\omega)$ 、 $G(\omega)$ 、 $K(\omega)$ 为线性相位且 $\tau = -1/2$ 的情况; 实验表明, 在边界处确实能精确重建原信号。上面推导中令 $K(\omega) = \overline{G(\omega)}$ 即得到 Daubechies 紧支集规范正交小波的情形。

当 $H(\omega)$ 、 $G(\omega)$ 的相位是非线性时, 由于滤波器对不同频率成分时延不同, 因而不能用上述方法消除重建信号边界误差, 根据本文第3节的推导, 其精确重建原信号的最小范围应是 $[N_L + 1, N_R - 1]$ 。

4.2 亚抽样时的边界误差

在用小波变换实现数据压缩时, 需对变换后的结果再进行 2:1 亚抽样。对常用的 $G(\omega) = -e^{-i\omega} \overline{H(\omega + \pi)}$ 的情形, 即使 $H(\omega)$ 是线性相关的, 也不能完全消除边界失真。 $H(\omega)$ 为线性相位的好处是使边界失真范围仅在一个点内(每变换一次)。不妨假定 $H(\omega)$ 的相移为零(若不为零可用 4.1 的方法使其为零而不影响结论的正确性)。此时

$$H(\omega) = |H(\omega)|,$$

$$G(\omega) = -e^{-i\omega} |\overline{H(\omega + \pi)}|,$$

$$g_s = (-1)^{1-s} h_{j-s}$$

也即 $G(\omega)$ 相移为 $\Phi_s(\omega) = \omega$, 信号 $f(n)$ 经过 g_s 后的时延为 $n_0 = 1$ 。图 4 画出了信号 $f(n)$ 、 $f(n)$ 边界延拓得到的 $f'(n)$ 及 $f'(n)$ 经 g_s 滤波后的波形 $Wf(n)$, 若只保留 $Wf(n)$ 的 $0 \sim L-1$ 的

一段数据,则重建原信号时是按图 4 中的 $W_0 f(n)$ 方式对 $W f(n)$ 进行边界延拓,显然重建信号在边界附近的值是与原信号不同的。

如果保留 $W f(n)$ 的 $[1, L]$ 的一段数据,则可正确恢复原信号。但 2:1 亚抽样时按 Mallat 塔式算法有(考虑一级小波变换)

$$\{f(n) = \sum_m A_0^j f(n) h(m - 2n) = \sum_m d(m) h(m - 2n)$$

$$\{f(n) = \sum_m D_0^j f(n) g(m - 2n) = \sum_m d(m) g(m - 2n)$$

其中 $A_0^j f, D_0^j f (j = 0, 1)$ 分别表示第 j 次小波变换,并对其进行 2:1 亚抽样的结果,左边界处的抽样点示于图 4 中的 $W_0 f(n)$, 用空心圆表示。显然, $W f(n)$ 在 $n = 1$ 点的信息被丢失了,即使用本文 4.1 节中的方法也无法得到第 1 点的信号。且在重建时对 $W_0 f(n)$ 的边界延拓变成了图 4 中的 $W_1 f(n)$;显然在边界处的延拓与实际不符,故重建的信号在边界处仍具有失真。

5 结 论

1) 小波变换中的滤波器传递函数 $H(\omega), G(\omega), K(\omega)$ 不满足精确重建条件是导致重建信号在跃变处产生寄生振荡的一个重要原因。

2) 在有限长数据的情况下为了消除边界误差应选用 $H(\omega) = \overline{H(\omega)}, G(\omega) = \overline{G(\omega)}, K(\omega) = \overline{K(\omega)}$ 或线性相位滤波器,使其满足边界对称条件。

3) 当滤波器不满足边界对称条件时,其精确重建信号的最小范围是 $[N_L + 1, N_R - 1]$ 。

4) 当对小波变换后的数据进行 2:1 亚抽样并令 $G(\omega) = -e^{-j\omega} \overline{H(\omega + \pi)}$ 时,即使 $H(\omega), G(\omega)$ 是线性相位的,仍无法完全消除边界误差,但可使边界误差范围最小。

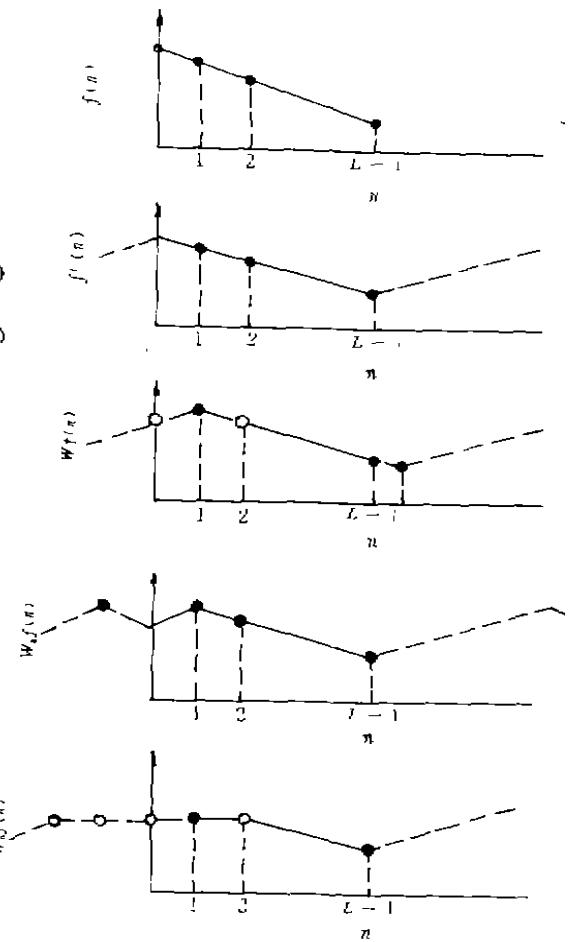


图 4 数据压缩时的边界延拓

参 考 文 献

- 1 秦前清, 杨宗凯. 实用小波分析. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1994. 142~148
- 2 Gunnar K, Martin V. Extension of finite length signals for sub-band coding. Signal Processing, 1989, 17: 161~168
- 3 马维祯, 殷瑞祥. 小波变换理论及其在信号处理中的应用. 数据采集与处理, 1994, 9(2): 121~129