1996 年 9 月 重庆大学学报（自然科学版） Vol.19,№.5
第 19 卷第 5 期 Journal of Chongqing University(Natural Science Edition) Sep. 1996

(:6 37-41

L-B 算子的推广及其在电磁场边值问题中的应用*

Generalizations of Laplace-Beltrami Operator and Applications to Boundary Value Problems of Electromagnetic Fields

TM153

云正清** 黄键 谭邦定 汪泉弟
Yun Zhengqing Huang Jian Tan Bangding Wang Quandi
（重庆大学电气工程系，重庆，630044，第一作者 34 岁，男，博士）

摘　要　用推广的 L-B(Laplace-Beltrami)算子建立外微分形式新的边值问题，并给出其解的唯一性定理。将结果用于静态电磁场，可得到有唯一解的相应边值问题新的一般表达形式。

关键词　边值问题；静态电磁场／L-B 算子　电磁场

中国图书资料分类法分类号　O154；TM153

ABSTRACT　New boundary value problems associated with general L-B operator and theorems of uniqueness of their corresponding solutions are given. Applying these results to static electromagnetic fields, new formulations of boundary value problems are derived.

KEYWORDS　boundary-value problems; static-state electromagnetic fields / L-B operator

0　引　言

场论中的标量和矢量可以统一地由外微分形式(或微分形式)表示，相应地，Laplace 算子则由更一般的 Laplace-Beltrami 算子(以下简称 L-B 算子)代替。利用同调、相对同调等概念和相应的理论方法，可以对由 L-B 算子形成的边值问题作简单而直接的研究。50 年代，数学界曾对这类边值问题作过广泛深入的探讨[1]。

然而，Laplace 算子和 L-B 算子都只能描述均匀媒质中的电磁场。这一局限性使得人们无法利用优越的数学工具对较复杂的电磁场边值问题作一般的研究。笔者将 L-B 算子作进一步推广，使之能用于非均匀媒质中场的描述。建立关于外微分形式的新边值问题，并由此得到有唯一解的静态电磁场边值问题。

* 收文日期　1995-05-20
国家自然科学基金、霍英东基金和四川省青年科技基金资助项目
** 现在东南大学做博士后研究工作

1　L-B 算子及其推广

将外微分算子和余微分算子分别记为 d 和 δ，则 L-B 算子表为

$$\Delta = d\delta + \delta d \tag{1}$$

它将任一 p- 形式（即 p 次外微分形式）映射成另一个 p- 形式。

现在引入空间坐标的标量函数 $\kappa > 0$，推广的 LB 算子定义为：

$$\mathscr{L} = d(\kappa\delta) + \delta(\kappa d) \tag{2}$$

显然，当 $\kappa = 1$ 时，$\mathscr{L}$ 即为 △.

设 ω_1, ω_2 均为 p- 形式，则可以证明在区域 Ω（其边界为 $\partial\Omega$）上，有

$$\langle \mathscr{L}\omega_1, \omega_2 \rangle_\Omega = \langle \kappa d\omega_1, d\omega_2 \rangle_\Omega + \langle \kappa\delta\omega_1, \delta\omega_2 \rangle_\Omega + \int_{\partial\Omega} \varphi^*(\kappa\delta\omega_1) \wedge \varphi^*(*\omega_2) - \int_{\partial\Omega} \varphi^*(\omega_1) \wedge \varphi^*(*\kappa d\omega_1) \tag{3}$$

式中 $\langle\ ,\ \rangle_\Omega$ 表示区域 Ω 上的内积；φ^* 为 pull-back 算子；$*$ 为 Hodge 星算子。称式(3)为算子 $\mathscr{L}$ 的 Green 第一恒等式。

由式(3)的边界积分项可以定义四个边界算子：

$$\mathscr{D} = \varphi^*, \mathscr{D}' = (\varphi^*\kappa\delta), \mathscr{N} = (\varphi^*\kappa * d), \mathscr{N}' = (\varphi^* *) \tag{4}$$

则 Green 公式(3)可改写为

$$\langle \mathscr{L}\omega_1, \omega_2 \rangle_\Omega = \langle \kappa d\omega_1, d\omega_2 \rangle_\Omega + \langle \kappa\delta\omega_1, \delta\omega_2 \rangle_\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathscr{D}'\omega_1 \wedge \mathscr{N}'\omega_2 - \int_{\partial\Omega} \mathscr{D}\omega_1 \wedge \mathscr{N}\omega_1$$

2　新边值问题

设 ω 为 p- 形式，Ω 为三维有界域；其边界为 $\partial\Omega$. 算子 $\mathscr{L}$ 的第一类(Dirichlet)和第二类(Neumann)边值问题分别定义为

$$\begin{cases} \mathscr{L}\omega = \rho_s & \text{in } \Omega & (5a) \\ \mathscr{D}\omega = \varphi_s, \mathscr{D}'\omega = \varphi_s' & \text{on } \partial\Omega & (5b) \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} \mathscr{L}\omega = \rho_s & \text{in } \Omega \\ \mathscr{N}\omega = \psi_s, \mathscr{N}'\omega = \psi_s' & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{6}$$

下面考察边值问题(5)和(6)的特例。

1） ω 为 0- 形式。此时 ω 与场论中的标量 φ 对应，式(5) 和式(6) 分别与下列两类边值问题等价：

$$\begin{cases} -\nabla\cdot(\kappa\nabla\varphi)=f \\ \varphi=\varphi_s \end{cases} \tag{7}$$

和

$$\begin{cases} \nabla\cdot(\kappa\nabla\varphi)=f \\ \kappa(\partial\varphi/\partial n)=q_s \end{cases} \tag{8}$$

也就是说，0- 形式的新边值问题可以与静态场标量位的两类边值问题相同。

2） ω 为 1- 形式。此时 ω 与场论中的矢量 $\boldsymbol{A}$ 对应。则式(5) 和式(6) 分别与下列两类边值问题等价：

$$\begin{cases} \nabla\times(\kappa\nabla\times\boldsymbol{A})-\nabla(\kappa\nabla\cdot\boldsymbol{A})=\boldsymbol{J} \\ \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{K}_t,\kappa\nabla\cdot\boldsymbol{A}=K_n \end{cases} \tag{9}$$

和

$$\begin{cases} \nabla\times(\kappa\nabla\times\boldsymbol{A})-\nabla(\kappa\nabla\cdot\boldsymbol{A})=\boldsymbol{J} \\ \boldsymbol{n}\times(\kappa\nabla\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{U}_t,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{A}=U_n \end{cases} \tag{10}$$

然而对静磁场而言，其矢量位 $\boldsymbol{A}$ 的第一、二类边值问题却分别是

$$\begin{cases} \nabla\times(\kappa\nabla\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{J} \\ \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{K}_t \end{cases} \tag{11}$$

和

$$\begin{cases} \nabla\times(\kappa\nabla\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{J} \\ \boldsymbol{n}\times(\kappa\nabla\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{U}_t \end{cases} \tag{12}$$

3　解的唯一性

现在对上述两类边值问题(5) 和(6) 建立其解的唯一性定理。设边值问题(5) 和(6) 的齐次解为 ω_0。

引理 3.1　ω_0 为调和场，即满足

$$\mathrm{d}\omega_0=0,\delta\omega_0=0$$

事实上，在 Green 公式(3) 中令 $\omega_1=\omega_2=\omega_0$，并代入齐次的控制方程和边界条件，有

$$(\kappa\mathrm{d}\omega_0,\mathrm{d}\omega_0)_\Omega+(\kappa\delta\omega_0,\delta\omega_0)_\Omega=0$$

因 $\kappa>0$，由内积的正定性立即可得 $\mathrm{d}\omega_0=0,\delta\omega_0=0$。即 ω_0 为调和场。

引理 3.2[1]　对任一调和场 ω，如果给定齐次边值 $\mathscr{D}\omega=0$，且具相对 p- 周期为零，即

$$\int_{z_p^\kappa}\omega=0,z_p^\kappa\in H_p(\Omega,\partial\Omega),1\leqslant\kappa\leqslant\beta_p(\Omega,\partial\Omega)$$

则在 Ω 内有 $\omega=0$，式中，$H_p(\Omega,\partial\Omega)$ 为相对 p- 同调群，$\beta_p(\Omega,\partial\Omega)$ 为其 Betti 数。

引理 3.3[1]　对任一调和场 ω，如果给定其齐次边值 $\mathscr{N}\omega=0$，并且其 p- 周期为零，即

$$\int_{l_p^k} \omega = 0, l_p^k \in H_p(\Omega), 1 \leqslant k \leqslant \beta_p(\Omega)$$

则在 Ω 内有 $\omega = 0$. 式中，$H_p(\Omega)$ 为（绝对）p- 同调群，$\beta_p(\Omega)$ 为其 Betti 数。

利用上述三个引理可以证明新边值问题解的唯一性定理。

定理 3.1　给定 p- 形式 ω 的相对 p- 周期：

$$\int_{z_p^k} \omega = u_k, z_p^k \in H(\Omega, \partial\Omega), 1 \leqslant k \leqslant \beta_p(\Omega, \partial\Omega) \tag{13}$$

则边值问题(5) 的解是唯一的。

事实上，式(5) 的齐次解(ω_0) 为调和场（引理 3.1），因此由式(5b) 和式(13) 可知，ω_0 满足

$$d\omega_0 = 0, \delta\omega_0 = 0$$

$$\mathscr{D}\omega_0 = 0, \mathscr{D}^n \omega_0 = 0$$

$$\int_{z_p^k} \omega_0 = 0, z_p^k \in H(\Omega, \partial\Omega), 1 \leqslant k \leqslant \beta_p(\Omega, \partial\Omega)$$

故由引理 3.2 知 $\omega_0 = 0$，从而式(5) 的解为唯一。定理得证。

定理 3.2　给定 p- 形式 ω 的 p- 周期：

$$\int_{l_p^k} \omega = v_k, l_p^k \in H(\Omega), 1 \leqslant k \leqslant \beta_p(\Omega)$$

则边值问题(6) 的解是唯一的。证明的方法与定理(3.1) 相似，这里略去。

4　应　　用

静态电磁场边值问题一直受到工程界的重视。特别是对矢量位的边值问题，从理论和数值分析两个方面都作了较深入的探讨[2]。

已经看到，0- 形式的边值与标量位的边值问题完全相同，因此这里着重讨论 1- 形式的情形，它对矢量位的边值问题有直接的意义。对 1- 形式来说，边值问题(5) 和(6) 分别成为(9) 和(10). 现在取 Coulomb 规范，即令 $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$，则由定理 3.1 和 3.2 可以直接导出下面两个定理：

定理 4.1　矢量位的第一类边值问题

$$\nabla \times (\kappa \nabla \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{J}, \nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0 \tag{14a}$$

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{K}_t, \kappa \nabla \cdot \boldsymbol{A} = K_n = 0 \tag{14b}$$

若给定

$$\int_{\sigma_k} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l} = u_k, \sigma_k \in H(\Omega, \partial\Omega), 1 \leqslant k \leqslant \beta_1(\Omega, \partial\Omega) \tag{14c}$$

则其解是唯一的。

定理 4.2　对于矢量位的第二类边值问题

$$\nabla \times (\kappa \nabla \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{J}, \nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0 \tag{15a}$$

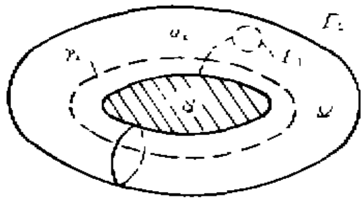
$$\boldsymbol{n} \times (\kappa \nabla \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{U}_t, \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{A} = U_n \tag{15b}$$

若给定

$$\int_{\gamma_k} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = v_k, \gamma_k \in H(\Omega), 1 \leqslant k \leqslant \beta_1(\Omega) \tag{15c}$$

则其解是唯一的。

对于一个由镯环表面 Γ_0 和其内部的闭面 Γ_1 所围成的多连通静磁场区域，式(14c) 和式(15c) 中各自的积分路径 σ_k 和 γ_k 如图中所示。此情况下，$\boldsymbol{A}$ 的相对 1- 周期 $\int_{\sigma_k} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 无明确的物理意义，但 $\boldsymbol{A}$ 的 1- 周期 $\int_{\gamma_k} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 则表示穿过循环表面内轮廓线所围曲面 S 的磁通量。



多连通静磁场区域示意图

应当指出，式(14c) 和式(15c) 是对场域拓扑性质的限制，它是保证解唯一所必需的。此外，新边值问题(14) 和(15) 既具有物理意义又比边值问题(11) 和(12) 更一般。文献[3]、[4] 利用矢量空间的方法得到了相似的结果。

5　结　　论

L B 算子推广后，能用于非均匀媒质中电磁场的描述，拓宽了其应用范围。用推广的 L-B 算子构造的新边值问题(5)和(6)，其解在一定条件下是唯一的。

0-形式的新边值问题与静态场中标量位的边值问题相同，而 1-形式的新边值问题却不同于静磁场中矢量位的边值问题。尽管如此，在 Coulomb 规范下，新边值问题可以有物理意义。静态场中矢量位(场)的第一和第二类边值问题分别具有式(14)和式(15)所示的一般形式。

参　考　文　献

1　Fox R H, Spencer D C, Tucker A W. Algebraic Geometry and Topology. Princeton: Princeton Univ Press, 1957. 129～138

2　Csendes Z J, Weiss J, Hoole S R H. Alternative vector potential formulations of 3-D magnetostatic field problems. IEEE MAG, 1982, 18(2): 367～372

3　Bossavit A. Magnetostatic problems in multiplyconnected regions: some properties of the curl operator. IEE Proc-A, 1988, 135(3): 179～187

4　Ciarlet P, Jr. A decomposition of $L^2(\Omega)^3$ and an application to magnetostatic equations. Math Models & Methods Appl Sci, 1993, 3(3): 289～301