1996 年 11 月　　重庆大学学报（自然科学版）　　Vol. 19, №. 6
第 19 卷第 6 期　　Journal of Chongqing University (Natural Science Edition)　　Nov. 1996

(3) 14－19

哈拉里图的可靠性分析*

Analysis of Reliability of the Harary Graph

O157.5

何中市[①]　　杨晓帆[②]　　易　东[②]
He Zhongshi　　Yang Xiaofan　　Yi Dong
（①重庆大学系统工程及应用数学系，重庆，630044；②计算机研究所；第一作者 31 岁，男，副教授，博士生）

摘　要　在图的顶点相互独立地以常数概率失效的情况下，图的可靠度定义为删除失效顶点及与之相关联的边所得到的图连通的概率。对一类具有最佳连通性的图——哈拉里图，得到可靠度的界，并分析了可靠度的渐近性质。

关键词　可靠度；渐近性；哈拉里图
中国图书资料分类法分类号　O157.5

ABSTRACT　When the vertices fail independently with each other by a constant probability, the reliability of a graph is defined to be the probability that the graph results from deleting the failed vertices together with the incidence edges is connected. The Harary graph, a class of graphs with the best connectivity is considered in this paper, the bound of it' s reliability is obtained, and the asymptotic property of reliability is also analysed.

KEYWORDS　reliability; asymptotic property; Harary graph

0　引　　言

可靠性理论主要研究一个系统在元件有一定失效概率条件下，系统具有给定功能的概率。许多系统，特别是计算机网络系统的可靠性问题都可模型化为图的可靠性问题。

图的可靠性理论包括两个方面的内容：一是分析问题，即评估一个给定图的可靠度；另一方面是综合问题，即在给定元件后，设计具有最大可靠度的图。图的元件失效（被移去）可划分为三类模型：

- 边失效模型：边可能失效、顶点完全可靠；
- 点失效模型：顶点可能失效、边完全可靠；
- 点-边混合失效模型：顶点和边都可能失效。

它们都具有一定的实际背景，其综述性工作可见[1～3]。由于点失效模型适应于更多的真实系统，近年来国际上一些学者正致力于此方面的研究工作[4～6]。

点失效模型下，图 G 的顶点以一定概率失效（被移去），图 G 的剩余可靠度（简称可靠度）$R(G)$ 定义为其幸存（剩余）顶点导出子图连通的概率。即

* 收文日期　1996-03-15
国家自然科学基金资助项目

$$R(G) = P\{G \text{ 的剩余顶点导出子图连通}\}$$

其中 $P\{A\}$ 表示随机事件 A 的概率。

现有研究主要尚限于每个顶点独立地、等概率 p 地失效这种特殊情形，虽然如此，但其可靠度 $R(G)$ 的计算问题仍是 NP- 难的[5]。

笔者讨论的问题：顶点独立等概率 p 地失效模型下，一类重要的图 —— 哈拉里图 $H_{n,m}$ 的可靠性分析问题。主要思路：先估计图 $H_{n,m}$ 的可靠度 $R(H_{n,m})$，再分析 $R(H_{n,m})$ 的渐近性质：即当 n 无限增大时，$R(H_{n,m})$ 的渐近变化趋势。

1　哈拉里图及其寻径

哈拉里图是 1962 年由 Harary[6] 提出来的，它解决了给定顶点数 n、边数 e，设计具有最大连通度的图这个优化问题。由于它具有最佳连通性及结构简单，在网络分析与设计中得到了广泛应用[1]。

n 阶、顶点最小度为 m 的哈拉里图记为 $H_{n,m}$：其顶点被标记为 $0,1,\cdots,n-1$；顶点间的邻接关系为：顶点 i 的邻接顶点集为

$$N(i) = \{(i \pm 1)、(i \pm 2)、\cdots、(i \pm [m/2](\mathrm{mod}\ n))\}, i = 0,1,\cdots,n-1$$

并且，如果 m 为奇数，每个顶点 $i(i = 0,1,\cdots,[(n-1)/2]$ 的邻接集中还含有顶点 $i + [n/2]$.

显然，若 mn 为偶数，则 $H_{n,m}$ 为 m 一正则循环图；否则，$H_{n,m}$ 有 $n-1$ 个 m 度顶点、1 个 $m+1$ 度顶点，并且移去某$\{\frac{n}{2}\}$条边后即为$(m-1)$- 正则循环图，即 $H_{n,m-1}$，同时若添上$[\frac{n}{2}]$条边(匹配，具体地如下：$\{i, i+[n/2]\}, i = [(n-1)/2]+1,\cdots,n-1$) 则成为$(m+1)$- 正则图。

设 $D = D(H_{n,m})$ 表示 $H_{n,m}$ 的直径，$N_d = N_d(H_{n,m})$ 表示 $H_{n,m}$ 中距离为 d 的点对数目；$1 \leqslant d \leqslant D$. 则有

引理 1　对 $H_{n,m}$，设 $m = 2k \geqslant 2$ 为偶数，则

1) $D = \{2[n/2]/m\}$；

2) $$N_d = \begin{cases} \frac{m}{2}n, & 1 \leqslant d \leqslant D-1; \\ \frac{m}{2}n + \binom{n}{2} - \frac{mn}{2}D \leqslant \frac{m}{2}n, & d = D \end{cases}$$

证　1) 由于当 $m = 2k$ 的偶数时，$H_{n,m} = C_n\langle 1,2,\cdots,k\rangle$ 为循环图，所以

$$D = \max_{\substack{i \neq j \\ i,j \in \{0,1,\cdots,n-1\}}} d(i,j) = \max_{1 \leqslant j \leqslant n-1} d(0,j) = \max_{1 \leqslant j \leqslant [n/2]} d(0,j)$$

$$= \max_{1 \leqslant j \leqslant [n/2]} \{j/k\} = \{[n/2]/k\} = \{2[n/2]/m\}$$

注：其中 $d(i,j)$ 表示顶点 i、j 间的距离。

2) 当 $1 \leqslant d \leqslant D-1$ 时

$$d(0,j) = d \Leftrightarrow j \in \{(d-1)k + x, n - (d-1)k - x, x = 1,\cdots,k\}$$

即与顶点 0 距离为 d 的顶点有 $2k$ 个，亦即含有顶点 0 且距离为 d 的点对个数为 $2k$，由其点对称性可知

$$2N_d = 2k \cdot n$$

从而

$$N_d = kn = \frac{m}{2}n$$

显然

$$N_D = \binom{n}{2} - \sum_{d=1}^{D-1} N_d = \binom{n}{2} - \frac{m}{2}n(D-1)$$

$$= \frac{m}{2}n + \binom{n}{2} - \frac{m}{2}nD \leqslant \frac{m}{2}n \quad (\because D \geqslant 2[n/2]/m \geqslant (n-1)/m)$$

如果图 G 的任何两个顶点间都存在多条较短的路径(内部顶点不相交),则 $R(G)$ 较大。由此可见,若对 $H_{n,m}$ 的每对顶点都能找出尽可能多且尽可能短的内部顶点不相交路径,则可得到 $R(H_{n,m})$ 较好的下界,于是下面将给出 $H_{n,m}$ 的寻径结果。

定理 1 对 $H_{n,m}$,设 $m = 2k$ 为偶数,则 $H_{n,m}$ 中每对距离为 d 的顶点对间都存在 k 条长度 $\leqslant d+1$ 的内部顶点不相交路径。

证 设 (i,j) 为任意的点对,$d(i,j) = d$.

由于 $H_{n,m}$ 在 $m = 2k$ 时为循环同、故可令 $i = 0$、$j = (d-1)k + j_0$,其中 $1 \leqslant j_0 \leqslant k$. 于是 i,j 间的 k 条长度 $\leqslant d+1$ 的路径可构造如下:

$$i = 0 \to x \to x + k \to \cdots \to x + (d-1)k \to (d-1)k + j_0 = j$$

其中 $x = 1,\cdots,k$

易于验证,以上 k 条路径间的内部顶点不相交的。

2 哈拉里图可靠度的界

在点失效模型下,对哈拉里图 $H_{n,m}$,设其顶点失效率为 p,现在对其(剩余)可靠度 $R(H_{n,m})$ 进行估计。

用 A_n 表示随机事件"对所有整数 $d \geqslant 2$,图 $H_{n,m}$ 中每对距离为 d 的点对间都存在一条路径 P,P 被其上的剩余(幸存)顶点分割成若干条路段,每条路段(两个端点为剩余顶点)的长度 $\leqslant d-1$". 则有如下结论。

引理 2 $R(H_{n,m}) \geqslant P\{A_n\}$

证 只需证明 A_n 发生,则 $H_{n,m}$ 的剩余顶点导出子图连通,即 $H_{n,m}$ 中任何两个剩余顶点 (u,v) 间都存在一条完全由剩余顶点连成的路径。

用数学归纳法证明以上结论。

1) 当 $d(u,v) = d = 1$ 时,即 u,v 相邻,结论成立。

2) 假设当 $d(u,v) = d < r$ 时结论成立,即 (u,v) 间存在完全由剩余顶点连成的路径。

现考察 $d(u,v) = d = r$ 情形,此时 $r \geqslant 2$,由于事件 A_n 发生,即在 $H_{n,m}$ 中存在一条路径 P,且 P 被剩余顶点分割成长度 $\leqslant d-1 = r-1$ 的若干条路段(每条路段的两个端点为剩余顶点);再由归纳假设,这样的每条路段(长度 $\leqslant r-1$)都存在完全由剩余顶点连成的路径,将这些路径依次连接起来即成要求路径。

利用上述结论得到了可靠度的上、下界:

定理 2 设 G_n 为 $d(n)$ 正则图,$H_{n,m}$ 为哈拉里图,则

1) $R(G_n) \leqslant \exp\left\{-\frac{n}{d^2(n)+1}(1-p)p^{d(n)}\right\}$;

2) $R(H_{n,m}) \leqslant \exp\left\{-\dfrac{n}{(m+1)^2+1}(1-p)p^{m+1}\right\}$；

3) $R(H_{n,m}) \geqslant 1 - \dfrac{1}{1-p^k}kn(1-(1-p)^2)^k$，其中 $k=[m/2]$.

证　设 G_n 的 n 个顶点为 $v_0,\cdots,v_{n-1}$. B_i 表示随机事件“G_n 中顶点 v_i 幸存，而与 v_i 相邻的顶点全部失效”，$i=0,\cdots,n-1$. 则

$$1-R(G_n) = P\{G_n\text{ 的幸存顶点导出子图不连通、或为孤立点、或为空图}\}$$
$$\geqslant P\{G_n\text{ 的剩余顶点导出子图含有孤立顶点}\}$$
$$= P\{\bigcup_{i=0}^{n-1}B_i\} = 1 - P\{\bigcap_{i=0}^{n-1}\overline{B}_i\}$$

从而

$$R(G_n) \leqslant P\{\bigcap_{i=0}^{n-1}\overline{B}_i\}$$

设 G_n 中两两距离 $\geqslant 3$ 的顶点最大个数为 r，由 G_n 的 $d(n)$ 正则性有

$$r(1+d(n)+d(n)(d(n)-1)) \geqslant n$$

从而

$$r \geqslant \frac{n}{d^2(n)+1}$$

不妨设这 r 个顶点为 $v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_r}$，则有 $B_{i_1},B_{i_2},\cdots,B_{i_r}$ 相互独立。又

$$P\{\overline{B}_{i_j}\} = 1 - P\{B_{i_j}\} = 1-(1-p)p^{d(n)}$$

从而

$$R(G_n) \leqslant P\{\bigcap_{j=1}^{r}\overline{B}_{i_j}\} = \prod_{j=1}^{r}P\{\overline{B}_{i_j}\}$$
$$= (1-(1-p)p^{d(n)})^r \leqslant (1-(1-p)p^{d(n)})^{\frac{n}{d^2(n)+1}}$$
$$= \exp\left\{\frac{n}{d^2(n)+1}\ln(1-(1-p)p^{d(n)})\right\}$$
$$\leqslant \exp\left\{-\frac{n}{d^2(n)+1}(1-p)p^{d(n)}\right\}$$

2) 若 mn 为偶数，则 $H_{n,m}$ 为 m- 正则图，从而 $d(n)=m$，由结论 1) 即得

$$R(H_{n,m}) \leqslant \exp\left\{-\frac{n}{m^2+1}(1-p)p^m\right\}$$
$$\leqslant \exp\left\{-\frac{n}{(m+1)^2+1}(1-p)p^{m+1}\right\}$$

若 mn 为奇数时，由 $H_{n,m}$ 的性质可知，$H_{n,m}$ 为一个 $d(n)=m+1$ 正则图的生成子图，故

$$R(H_{n,m}) \leqslant \exp\left\{-\frac{n}{(m+1)^2+1}(1-p)p^{m+1}\right\}$$

3) 首先，当 $m=2k$ 为偶数时。

用 $A_d(i,j)$ 表示事件“$H_{n,m}$ 中顶点 i,j 间存在一条路径 P，P 被其上剩余顶点分割为长度 $\leqslant d-1$ 的路段，$d(i,j)=d$”，则结合引理 2 可得

$$\overline{A_t} = \bigcup_{\substack{d(i,j)=d \\ 2\leqslant d\leqslant D}} \overline{A_t(i,j)}$$

$$R(H_{n,m}) \geqslant P\{A_t\} = 1 - P\{\overline{A_t}\}$$

而

$$P\{\overline{A_t}\} \leqslant \sum_{\substack{d(i,j)=d \\ 2\leqslant d\leqslant D}} P\{\overline{A_t(i,j)}\} = \sum_{d=2}^{D} \sum_{d(i,j)=d} P\{\overline{A_t(i,j)}\}$$

由定理 1，(i,j) 间存在 k 条长度 $\leqslant d+1$ 的路径，显然这些路径长度 $\geqslant d$. 在这当中长度为 d 的路径条数记为 x_d，自然长度为 $d+1$ 的路径有 $k-x_d$ 条，于是

对任意的点对 (i,j)：$d(i,j) = d \geqslant 2$，有

$$P\{\overline{A_t(i,j)}\} \leqslant (p^{d-1})^{x_d}(p^{d-2}(1-(1-p)^2))^{k-x_d}$$
$$\leqslant [p^{d-2}(1-(1-p)^2)]^k$$

注意到 $N_d \leqslant \frac{m}{2}n$.

$$P\{\overline{A_t}\} \leqslant \sum_{d=2}^{D} [p^{d-2}(1-(1-p)^2)]^k$$
$$\leqslant \frac{m}{2}n(1-(1-p)^2)^k \frac{1}{1-p^k}.$$

从而

$$R(H_{n,m}) = R(H_{n,2k}) \geqslant 1 - \frac{1}{1-p^k}kn(1-(1-p)^2)^k$$

其次若 $m = 2k+1$ 为奇数。

由于 $H_{n,2k}$ 是 $H_{n,2k+1}$ 的生成子图，从而

$$R(H_{n,m}) \geqslant R(H_{n,2k}) \geqslant 1 - \frac{1}{1-p^k}kn(1-(1-p)^2)^k$$

综上所述，定理成立。

3 哈拉里图可靠度的渐近性质

下面分析图族 G_n 可靠度 $R(G_n)$ 当顶点数 n 趋于无穷大时的极限情形。

对正则图族 G_n，若其顶点度 $d(n)$ 相对于顶点数 n 较小，则 $R(G_n)$ 将随着 n 的无穷增大而趋近于零。具体地有如下结论。

引理 3 设 G_n 为 $d(n)$- 正则图族，若 $d(n) = o(\log_2 n)$，则 $\forall\, p \in (0,1)$，$R(G_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

证 由定理 2

$$R(G_n) \leqslant \exp\left\{-\frac{n}{d^2(n)+1}(1-p)p^{d(n)}\right\}$$

由于 $d(n) = o(\log_2 n)$，即 $\frac{d(n)}{\log_2 n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$，而

$$\frac{n}{d^2(n)+1}p^{d(n)} = \frac{1}{d^2(n)+1}np^{\log_2 n\cdot\frac{d(n)}{\log_2 n}}$$
$$= \frac{1}{d^2(n)+1}n^{1+\frac{d(n)}{\log_2 n}\log_2 p} \xrightarrow[p\in(0,1)]{n\to\infty} \infty$$

注意到 $R(G_n)$ 的非负性即得 $R(G_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

由此，对哈拉里图也不例外，即只要 $d(m) = m = o(\log_2 n)$，则 $R(H_{n,m}) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. 故只需分析当 $d(m) = m \neq o(\log_2 n)$ 时，可靠度的渐近性质。于是，下面就 $m = [2\log_2 n]$ 的情形，分析 $R(H_{n,m})$ 的渐近性。(注：利用定理 2，易于分析其它情形之渐近性)

定理 3　对 $H_{n,m}$，设 $m = [2\log_2 n]$，则

1) 当 $p > \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$R(H_{n,m}) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

2) 当 $p < 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$R(H_{n,m}) \xrightarrow{n\to\infty} 1$.

证　1) 由定理 2 之结论 2)

$$R(H_{n,m}) \leqslant \exp\left\{-\frac{n}{(m+1)^2+1}(1-p)p^{m+1}\right\}$$

而

$$\begin{aligned}\frac{n}{(m+1)^2+1}p^{m+1} &= \frac{n}{(m+1)^2+1}p \cdot p^{[2\log_2 n]} \\ &\geqslant \frac{n}{(m+1)^2+1}p \cdot n^{2\log_2 p} \\ &\geqslant \frac{p}{(2\log_2 n+1)^2+1}n^{1+2\log_2 p} \xrightarrow[p>\frac{1}{\sqrt{2}}]{n\to\infty} \infty\end{aligned}$$

从而

$$R(H_{n,m}) \xrightarrow[p>\frac{1}{\sqrt{2}}]{n\to\infty} 0$$

2) 由定理 2 之结论 3)，欲证 $R(H_{n,m}) \xrightarrow[p<1-\frac{1}{\sqrt{2}}]{n\to\infty} 1$，只需证明 $kn(1-(1-p)^2)^k \xrightarrow[p<1-\frac{1}{\sqrt{2}}]{n\to\infty} 0$，

事实上

$$\begin{aligned}0 \leqslant kn(1-(1-p)^2)^k &\leqslant \frac{m}{2}n(1-(1-p)^2)^{\frac{m-1}{2}} \\ &\leqslant \frac{1}{2}(1-(1-p)^2)^{-1}mn(1-(1-p)^2)^{\log_2 n} \\ &= \frac{1}{2}(1-(1-p)^2)^{-1}[2\log_2 n]n^{1+\log_2(1-(1-p)^2)} \xrightarrow[p<1-\frac{1}{\sqrt{2}}]{n\to\infty} 0\end{aligned}$$

由此即得证定理成立。

参 考 文 献

1　Boesch F T. Systhesis of reliable networks; a survey. IEEE Trans. Reliab. 1986, 35(3): 240～246

2　Colbourn C. The combinatiries of network reliability. Oxford Univ. Press. New York: 1987. 10～102

3　Bollobas B. Random graphs. Academic Press. London: 1985. 49～91

4　Sutner K. The complexity of the residual node connectedness reliability problem. SIAM J. Comput. 1991, 20: 149～155

5　Goldschmidt O. On reliability of graphs with node failures. Networks, 1994, 24: 251～259

6　Harary F. The maximum connectivity of a graph. Proc. Nat. Acad. of Sci. USA. 1962, 48: 1142～11446