(4) 20-26

ATM 网络中 ON-OFF 源迭加的泊松过程近似*

TN913.24

A Poisson Process Approximation of the Superposition of ON-OFF Sources in ATM Multiplexers

O226

孙荣恒[1]　　　　李福建[2]
Sun Rongheng　　　　Li Fujian
(① 重庆大学应用数学系，重庆，630044；② 重庆后勤工程学院；第一作者 57 岁，男，副教授)

摘　要　研究了 ATM 网络的特性，并用批到达泊松过程去近似描述该网络的多个输入 ON-OFF 源的迭加过程，获得了排队系统 $M^r/G/1$ 的解。

关键词　ON-OFF 源；批到达；ATM 复用器；泊松过程；迭加　　ATM网络

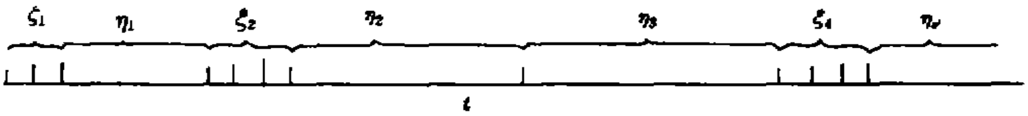
中国图书资料分类法分类号　O266；TB111　　排队系统

ABSTRACT　The performance of an ATM multiplexer is studied, the superposition of its multiply input ON-OFF sources is modeled by a poisson process with group arrivals. The solutions of $M^r/G/1$ queue are obtained.

KEYWORDS　ON-OFF source; group arrival; ATM multiplexer; Poisson process; superposition

0　引　　言

在通信中输入 ATM 复用器的往往是若干个打包间断声源和数据流的迭加。每个间断声源或数据流是由活动期和静止期交替出现而构成的流，简称为 ON-OFF 源。在活动期中，每经定长时间 T 有一个信息包到达。而在静止期中没有信息包到达。设第 i 个活动期与静止期的长度分别为 ξ_i,η_i，$\{\xi_i\}$ 为 $i\cdot i\cdot d$ 随机变量序列，$\{\eta_i\}$ 也为 $i\cdot i\cdot d$ 随机变量序列且 $\{\xi_i\}$ 与 $\{\eta_i\}$ 相互独立。一个活动期与紧接其后的一个静止期称为一个周期。设第 i 周期的长度为 ζ_i，则 $\zeta_i = \xi_i + \eta_i, i = 1,2,3,\cdots$，如图 1 所示。



附图　ON-OFF 源

* 收文日期　1996-06-14
国家自然科学基金资助项目(批准号：69480057)

当 N 个上述的 ON-OFF 源同时独立输入一个 ATM 复用器时就构成了一个迭加过程。这 N 个 ON-OFF 源可以是相同的，也可以是不同的，本文讨论它们都相同的情形。设 $\xi_i \sim \Gamma(1,\alpha)$，$\eta_i \sim \Gamma(1,\beta)$，$E(\xi_i) = \frac{1}{\alpha}$，$E(\eta_i) = \frac{1}{\beta}$. 由这 N 个 ON-OFF 源构成的迭加过程，由于随机性，有时候到达的信息包很多，有时很少，甚至没有"包"到达。它的性能较复杂，一般是用一个较简单的过程近似这个迭加的输入过程。[1]用两状态马尔柯夫调制泊松过程(MMPP)近似这个迭加，并用更新理论估计 MMPP 的参数，然后用矩阵分析方法解排队系统 MMPP/G/1. 有的用四状态 MMPP 近似这个迭加，并用统计方法估计 MMPP 的参数。[2]和[5]也用两状态的 MMPP 近似这个迭加过程，[2]用 N 过程解系统 $N/G/1$，[5]解队列 MMPP/D/1/K. 笔者用批到达泊松过程近似这个迭加输入过程，并精确求批到达泊松过程的两个参数，然后求排队模型 $M^x/G/1$ 的解。这个解在一定条件下与实际是相符合的。

1　排队系统 $M^X/G/1$ 的解

为了后面的需要，先来介绍排队系统 $M^x/G/1$ 的解。排队系统 $M^x/G/1$ 与 $M/G/1$ 的区别是每次到达不是一个，而是一批。X 是取正整数值的随机变量，设 $E(X) = x$，$D(X) = \sigma_x^2$ 均存在有限。记 X 的概率母函数($p.g.f$)为 $X(Z)$."批"到达间隔时间序列 $\{t_i\}$ 为 i.i.d 随机变量序列，且 t_i 服从参数为 λ 的指数分布，即 $t_i \sim \Gamma(1,\lambda)$。服务机构只有一个服务台，顾客的服务时间序列 $\{v_i\}$ 为 i.i.d 随机变量序列，且 v_i 服从一般分布，设 $E(v_i) = \frac{1}{\mu}$，$D(v_i) = \sigma^2$ 存在有限，并设 X，$\{t_i\}$，$\{v_i\}$ 相互独立。下面给出平衡状态下系统 $M^x/G/1$ 的一些结果。

定理 1　设 X_n 为第 n 个顾客服务完离开时系统 $M^x/G/1$ 中的顾客数。$\tilde{V}(s)$ 为 v_i 的拉普拉斯-司蒂阶变换(LST)，$P^+(Z)$ 为 X_n 的 p.g.f，则当 $\rho \equiv \frac{\lambda x}{\mu} < 1$ 时

$$P^+(Z) = \frac{(1-\rho)[X(Z)-1]\tilde{V}[\lambda - \lambda X(Z)]}{xZ - x\tilde{V}[\lambda - \lambda X(Z)]} \qquad |Z| \leqslant 1 \tag{1}$$

$$E(X_n) = \rho + \frac{\sigma_x^2 + x^2 - x}{2x(1-\rho)} + \frac{\lambda^2 x^2 \sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} \tag{2}$$

设 $P(Z)$ 为平稳($\rho < 1$)队长的 p.g.f，则

$$P(Z) = \frac{x(1-Z)}{1-X(Z)} P^+(Z) \tag{3}$$

$$P'(1) = \rho + \frac{\rho(\sigma_x^2 + x^2 - x)}{2x(1-\rho)} + \frac{\rho^2(1+\mu^2\sigma^2)}{2(1-\rho)} \tag{4}$$

证明　见[3]

定理 2　设 W_f 为每批第一个接受服务的顾客的等待时间，$\tilde{W}_f(S)$ 为 W_f 的 LST. 则当 $\rho < 1$ 时，有

$$\tilde{W}_f(s) = \frac{s(1-\rho)}{s - \lambda + \lambda X[\tilde{V}(s)]} \tag{5}$$

$$E(W_f) = \frac{\rho(\sigma_x^2 + x^2 + x\mu^2\sigma^2)}{2x\mu(1-\rho)} \tag{6}$$

证明　见[3]与[4].

定理 3　设 B 为系统 $M^x/G/1$ 的忙期，N 为在一个忙期中服务完的顾客数，$\tilde{B}(s)$ 为 B 的 LST，$L(Z)$ 为 N 的 p.g.f，则当 $\rho < 1$ 时，有

$$\tilde{B}(s)=X\{\tilde{V}[s+\lambda-\lambda\tilde{B}(s)]\} \tag{7}$$

$$N(Z)=X\{Z\tilde{V}[\lambda-\lambda N(Z)]\} \tag{8}$$

$$E(B)=\frac{x}{\mu-\lambda x},\quad D(B)=\frac{x^2\rho+\sigma_x^2+x\mu^2\sigma^2}{\mu^2(1-\rho)^3} \tag{9}$$

$$E(N)=\frac{x}{1-\rho},\quad D(N)=\frac{x^2\rho+\sigma_x^2+\lambda^2x^3\sigma^2}{(1-\rho)^3} \tag{10}$$

证明　设 U 为一批顾客服务时间之和，即

$$U=v_1+v_2+\cdots+v_X \tag{11}$$

设 Y 为在一个 U 内到达的顾客批数，$\{\xi(t),t\geqslant 0\}$ 是以 λ 为参数的泊松到达过程，则有

$$Y=\xi(U)=\xi\left(\sum_{i=1}^{X}v_i\right) \tag{12}$$

设 $B_1,B_2,B_3,\cdots$ 为独立同分布随机变量序列，且与 B 同分布。设 $N_1,N_2,N_3,\cdots$，为 i. i. d 随机变量序列，且与 N 同分布，且 $\{B_i\}$ 与 Y 独立，Y 与 $\{N_i\}$ 独立。于是有

$$B=U+B_1+B_2+\cdots+B_Y \tag{13}$$

$$N=X+N_1+N_2+\cdots+N_Y \tag{14}$$

由(11)式得　$E(U)=E(X)E(v_i)=\dfrac{x}{u}$

$$D(U)=D[E(U|X)]+E[D(U|X)]=D(X)E^2(v_1)+D(v_1)E(X)=\frac{\sigma_x^2}{\mu^2}+x\sigma^2$$

$$\tilde{U}(s)=E(e^{-sU})=\sum_{k=1}^{\infty}E[e^{-s(v_1+v_2+\cdots+v_k)}]P\{X=k\}=X\{\tilde{V}(s)]$$

即　$E(U)=\dfrac{x}{u}$，　$D(U)=\dfrac{\sigma_x^2}{\mu^2}+x\sigma^2$，　$\tilde{U}(s)=X[\tilde{V}(s)]$　(15)

又因　$E(Y)=\displaystyle\int_0^\infty E[\xi(t)]\mathrm{d}P\{U<t\}=\int_0^\infty \lambda t\mathrm{d}P\{U<t\}=\lambda E(U)=\rho$　(16)

所以由(13)、(15)、(16)式得

$$E(B)=E(U)+E(Y)E(B_1)=\frac{x}{\mu}+\rho E(B)=\frac{x}{\mu(1-\rho)}=\frac{x}{\mu-\lambda x}$$

而

$$\begin{aligned}\tilde{B}(s)&=E(e^{-sB})=\int_0^\infty e^{-st}E\{e^{-s[B_1+B_2+\cdots+B_{\xi(t)}]}\}\mathrm{d}P\{U<t\}\\&=\int_0^\infty e^{-st}\sum_{n=0}^{\infty}E[e^{-s(B_1+B_2+\cdots+B_n)}]P\{\xi(t)=n\}\mathrm{d}P\{U<t\}\\&=\int_0^\infty e^{-st}\sum_{n=0}^{\infty}[\tilde{B}(s)]^n e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\mathrm{d}P\{U<t\}\\&=\int_0^\infty e^{-st}\cdot e^{-\lambda t[1-\tilde{B}(s)]}\mathrm{d}P\{U<t\}\\&=\tilde{U}[s+\lambda-\lambda\tilde{B}(s)]\qquad[\text{由(15)式}]\\&=X\{\tilde{V}[s+\lambda-\lambda\tilde{B}(s)]\}\end{aligned}$$

由(7)式与 $E(B)=-\tilde{B}'(0)$，$E(B^2)=\tilde{B}''(0)$，$X'(1)=E(X)$，$X''(1)=E[X(X-1)]$，$\tilde{V}'(0)$

$= -E(v_1)$，$\tilde{V}''(0) = E(v_1^2)$，可得(9)式。

而 $$N(Z) = E(Z^N) = E(Z^{X+N_1+N_2+\cdots+N_X})$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} Z^k E\left[Z^{N_1+N_2+\cdots+N_{\xi(\sum_{i=1}^{k} v_i)}}\right] P\{X = k\}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} Z^k \int_0^{\infty} E\left[Z^{N_1+N_2+\cdots+N_{\xi(t)}}\right] \mathrm{d}P\left\{\sum_{i=1}^{k} v_i < t\right\} P\{X = k\}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} Z^k \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} E\left[Z^{N_1+N_2+\cdots+N_n}\right] P\{\xi(t) = n\} \mathrm{d}P\left\{\sum_{i=1}^{k} v_i < t\right\} P\{X = k\}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} Z^k \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t[1-N(Z)]} \mathrm{d}P\left\{\sum_{i=1}^{k} v_i < t\right\} P\{X = k\}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} Z^k E\left\{\mathrm{e}^{-\lambda[1-N(Z)]\sum_{i=1}^{k} v_i}\right\} P\{X = k\}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} Z^k \tilde{V}[\lambda - \lambda N(Z)]\}^k P\{X = k\}$$

$$= X\{Z\tilde{V}[\lambda - \lambda N(Z)]\}$$

由上式易得(10)式。

2　批到达泊松近似过程的参数

现在我们来求批到达泊松近似过程的两个参数，一个是到达的平均间隔时间$\frac{1}{\lambda}$，另一个是每批到达的平均顾客(信息包)数r. 为此，设ATM复用器的输入是由N个相互独立的ON-OFF源构成的迭加过程，每个ON-OFF源的活动期ξ_i均服从参数为α的指数分布，静止静η_i均服从参数为β的指数分布，即$\xi_i \sim \Gamma(1,\alpha)$，$\eta_i \sim \Gamma(1,\beta)$，用$K$表示迭加过程中处于活动期的ON-OFF源的个数. 显然，K能取值为$0,1,2,\cdots,N$，称K能取的值为这个迭加过程的相位。记$R_0 = \{0\}$，$R_1 = \{1,2,\cdots,N\}$称R_0，R_1分别为迭加过程的状态0和状态1.

对一个ON-OFF源来说，因为$E(\xi_i) = \frac{1}{\alpha}$，$E(\eta_i) = \frac{1}{\beta}$，所以在任一时刻它处于活动期的概率$p$为
$$p = E(\xi_i)/E(\zeta_i) = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \tag{17}$$
又因N个ON-OFF源独立同分布。所以在任一时刻，迭加过程中恰有k个处于活动期的概率为
$$P\{K = k\} = C_N^k p^k (1-p)^{N-k} \quad k = 0,1,\cdots,N\text{，即 } K \sim B(N,p) \tag{18}$$

显然，这个迭加过程就其相位来说，是一个生-灭过程。当它处于相位i(即有i个ON-OFF源处于活动期)时，其生率为$p_i = (N-i)\beta$，灭率为$q_i = i\alpha$，$i = 0,1,\cdots,N$. 所以其(相位)密度矩阵Q为

$$Q = \begin{bmatrix} -N\beta & N\beta & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha & -[\alpha+(N-1)\beta] & (N-1)\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2\alpha & -[2\alpha+(N-2)\beta] & (N-2)\beta & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & N\alpha & -N\alpha \end{bmatrix} \tag{19}$$

从而其平稳分布由 $\pi' Q = 0$ 与 $\sum_{k=0}^{N} \pi_k = 1$ (其中 $\pi' = (\pi_0, \pi_1, \cdots, \pi_N)$)

得
$$\pi_k = \frac{p_{k-1} p_{k-2} \cdots p_0}{q_k q_{k-1} \cdots q_1} \pi_0 = C_N^k \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}\right)^k \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right)^{N-k}, k = 0, 1, \cdots, N \tag{20}$$

此式与(18)式相同。由(19)式可立得相应跳跃链的概率转移矩阵 P:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\alpha}{\alpha + (N-1)\beta} & 0 & \frac{(N-1)\beta}{\alpha + (N-1)\beta} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{2\alpha}{2\alpha + (N-1)\beta} & 0 & \frac{(N-2)\beta}{2\alpha + (N-2)\beta} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

当迭加过程中恰有 i 个 ON-OFF 源处于活动期时,则其余 $(N-i)$ 个 ON-OFF 源必处于静止期。设 $X_i = \min(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_i), Y_{N-i} = \min(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{N-i}), i = 0, 1, \cdots, N$

其中,诸 ξ_i i.i.d,诸 η_i i.i.d., $X_0 = +\infty = Y_0$

设
$$Z_i = \min(X_i, Y_{N-i}), i = 0, 1, \cdots, N$$

则从迭加过程开始处于相位 i 时起,经过时间 Z_i 后,相位必发生变化,或 $i \to i-1$,或 $i \to i+1$. 记 $i \to i-1$ 的概率为 μ_i, $i \to i+1$ 的概率为 λ_i. 则由指数分布的性质和全概率公式,易知

$$\begin{cases} \mu_i = P\{X_i < Y_{N-i}\} = \frac{i\alpha}{i\alpha + (N-i)\beta} \\ \lambda_i = P\{X_i > Y_{N-i}\} = \frac{(N-i)\beta}{i\alpha + (N-i)\beta} \end{cases} \quad i = 0, 1, \cdots, N \tag{22}$$

记 $z_i = E(Z_i)$,则因 $Z_i \sim \Gamma(1, i\alpha + (N-i)\beta)$,故有

$$z_i = \frac{1}{i\alpha + (N-i)\beta}, \quad i = 0, 1, \cdots, N \tag{23}$$

设 $j \in R_1$, W_j 表示迭加过程从开始处于相位 j 时起一直到它首次到达相位0时止这段时间,记 $\omega_j = E(W_j)$,则由全期望公式,有

$$\begin{aligned} \omega_j &= E(W_j) = E(Z_j) + E(W_j | X_j < Y_{N-j}] P\{X_j < Y_{N-j}\} \\ &\quad + E[W_j | X_j > Y_{N-j}] P\{X_j > Y_{N-j}\} \\ &= z_j + \lambda_j \omega_{j+1} + \mu_j \omega_{j-1} \qquad j = 1, 2, \cdots, N-1 \\ \omega_N &= E(W_N) = E(Z_N) + \mu_N \omega_{N-1} = z_N + \omega_{N-1} \end{aligned}$$

即
$$\begin{cases} \omega_j = z_j + \lambda_j \omega_{j+1} + \mu_j \omega_{j-1}, j = 1, 2, \cdots, N-1 \\ \omega_N = z_N + \omega_{N-1} \end{cases} \tag{24}$$

解此二阶差分方程,注意到边界条件 $\omega_0 = 0$,得

$$\omega_{j+1} - \omega_j = -\frac{z_j}{\lambda_j} + \frac{\mu_j}{\lambda_j}(\omega_j - \omega_{j-1}) \qquad \text{[递推]}$$

$$= -\frac{\mu_j \mu_{j-1} \cdots \mu_1}{\lambda_j \lambda_{j-1} \cdots \lambda_1} \omega_1 - \sum_{i=1}^{j} \frac{z_i}{\lambda_i} \prod_{k=i+1}^{j} \frac{\mu_k}{\lambda_k} \tag{25}$$

故
$$z_N = \omega_N - \omega_{N-1}) = \frac{\mu_{N-1} \mu_{N-2} \cdots \mu_1}{\lambda_{N-1} \lambda_{N-2} \cdots \lambda_1} \omega_1 - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{z_i}{\lambda_i} \prod_{k=i+1}^{N-1} \frac{\mu_k}{\lambda_k}$$

从而
$$\omega_1 = \frac{\lambda_{N-1}\lambda_{N-2}\cdots\lambda_1}{\mu_{N-1}\mu_{N-2}\cdots\mu_1}z_N + \sum_{i=1}^{N-1}\frac{z_i}{\lambda_i}\cdot\frac{\lambda_i\lambda_{i-1}\cdots\lambda_1}{\mu_i\mu_{i-1}\cdots\mu_1}$$
$$= \rho_{N-1}z_N + \sum_{i=1}^{N-1}\frac{\rho_i z_i}{\lambda_i}$$

其中
$$\rho_i = \frac{\lambda_i\lambda_{i-1}\cdots\lambda_1}{\mu_i\mu_{i-1}\cdots\mu_1},\qquad i = 1,2,\cdots,N-1 \tag{26}$$

将(26)式代入(25)式，得
$$\omega_{j+1} = \frac{1}{\rho_j}\omega_1 - \sum_{i=1}^{j}\frac{z_i}{\lambda_i}\prod_{k=i+1}^{j}\frac{\mu_k}{\lambda_k} + \omega_j \qquad [\text{递推}]$$
$$= \sum_{i=1}^{j}\frac{1}{\rho_i}\omega_1 + \omega_1 - \sum_{l=1}^{j}\sum_{i=1}^{l}\frac{z_i}{\lambda_i}\prod_{k=i+1}^{l}\frac{\mu_k}{\lambda_k}$$

故
$$\omega_j = \sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{\rho_i}\omega_1 + \omega_1 - \sum_{l=1}^{j-1}\sum_{i=1}^{l}\frac{z_i}{\lambda_i}\prod_{k=i+1}^{l}\frac{\mu_k}{\lambda_k} \tag{27}$$

其中规定：当 $i > j$ 时，$\sum_{k=i}^{j}a_k = 0$，$\prod_{k=i}^{j}a_k = 1$.

由(26)式知，当迭加过程由状态 0 转移到状态 1 时，它每次在状态 1 平均停留时间为 ω_1，而它在状态 0 每次平均停时为 $z_0 = \frac{1}{N\beta}$. 令
$$\frac{1}{\lambda} = z_0 + \omega_1,\quad 即\quad \lambda = \frac{1}{z_0 + \omega_1} \tag{28}$$

我们把 $\frac{1}{\lambda} = z_0 + \omega_1$ 当成近似的(批到达)泊松过程中平均到达间隔时间。

由(26)式还可以看到，迭加过程每次在状态 1 平均停留时间为 ω_1，而 z_i 为迭加过程每次在相位 i 停留的平均时间. 由(26)式易见，每次在状态 1 期间，它在相位 i 停留的总的平均时间为 $\frac{\rho_i z_i}{\lambda_i}$，$i = 1,2,\cdots,N-1$，在相位 N 停留的总平均时间为 $\rho_{N-1}z_N$，而 z_i 的系数 $\frac{\rho_i}{\lambda_i}$(z_N 的系数 ρ_{N-1}) 即为迭加过程每次处于状态 1 期间经过相位 $i(N)$ 的平均次数. 因此，每经过平均时间 $\frac{1}{\lambda} = z_0 + \omega_1$，平均到达的信息包数为
$$m = \sum_{i=1}^{N-1} i\cdot\frac{\rho_i z_i}{\lambda_i T} + N\cdot\frac{\rho_{N-1}z_N}{T} \tag{29}$$

令
$$r = [m] \tag{30}$$

这样近似的批到达泊松过程中的两个参数都已确定。

直观上易知，当 z_0 相对 ω_1 来说较大，即当 z_0 较大，ω_1 较小时近似程度应较好. 或当 $\frac{1}{\alpha}$ 较小，$\frac{1}{\beta}$ 较大，且 N 不太大时近似程度应较好。

3 排队系统 $M^r/G/1$ 的解

注意到在排队系统 $M^X/G/1$ 中，$X \equiv r, z = r, \sigma_z^2 = 0, X(Z) = Z^r$ 和定理 1,2,3，可得
$$P(Z) = \frac{(1-\rho)(1-Z)\tilde{V}(\lambda - \lambda Z^r)}{\tilde{V}(\lambda - \lambda Z^r) - Z},\qquad \rho \equiv \frac{\lambda r}{\mu} < 1 \tag{31}$$
$$P'(1) = \rho + \frac{\rho(r^2 - r)}{2r(1-\rho)} + \frac{\rho^2(1+\mu^2\sigma^2)}{2(1-\rho)},\qquad \rho < 1 \tag{32}$$

$$\widetilde{W}_f(s)=\frac{s(1-\rho)}{s+\lambda-x[\widetilde{V}(s)]^r},\qquad \rho<1 \tag{33}$$

$$E(W_f)=\frac{\rho(r^2+r\mu^2\sigma^2)}{2r\mu(1-\rho)},\qquad \rho<1 \tag{34}$$

$$\widetilde{B}(s)=\{\widetilde{V}[s+\lambda-\lambda\widetilde{B}(s)]\}^r,\qquad \rho<1 \tag{35}$$

$$N(Z)=\{Z\widetilde{V}[\lambda-\lambda N(Z)]\}^r,\qquad \rho<1 \tag{36}$$

$$E(B)=\frac{r}{\mu-\lambda r},\qquad D(B)=\frac{r^2\rho+r\mu^2\sigma^2}{\mu^2(1-\rho)^3},\qquad \rho<1 \tag{37}$$

$$E(N)=\frac{r}{1-\rho},\qquad D(N)=\frac{r^2\rho+\lambda^2r^3\sigma^2}{(1-\rho)^3},\qquad \rho<1 \tag{38}$$

式(31)～(38)中的 λ 由(28)式给出。

4 损失率

在解排队系统 $M^r/G/1$ 中，基于系统中的缓冲器是无限的的假设，没有考虑信息包的损失。但是实际中的缓冲器均是有限的，因此一般要考虑信息包的损失。设系统中缓冲器的最大容量为 L 个信息包(包括正在服务的信息包)。这样在第 3 节中不是求排队系统 $M^r/G/1$ 的解，而是要求排队系统 $M^r/G/1/L$ 的解。而所要求的损失率就是系统 $M^r/G/1/L$ 中有 L 个信息包的概率。更一般地，我们现求系统 $M^X/G/1/L$ 的解，其中 X 如第 1 节所设。

对于系统 $M^X/G/1/L$，当 $\rho\triangleq\frac{\lambda x}{\mu}<1$ 时，由[6]知系统中有 k 个信息包的概率 p_k 由

$$p_k=p_0a_k+\sum_{j=1}^{k+1}p_ja_{k-j+1},\quad 0\leqslant k\leqslant L-2 \tag{39}$$

$$\sum_{k=0}^{L}p_k=1 \tag{40}$$

$$p_0=1-\rho \tag{41}$$

给出，其中 a_k 为在一个顾客服务时间内到达 k 个信息包的概率，$k=0,1,2,\cdots$. 分布列 $\{a_k,k>0\}$ 的 p.g.f 为

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k=\widetilde{V}[(\lambda-\lambda X(Z)] \tag{42}$$

所以，损失率为 p_L. p_L 由(39)～(42)式确定。

参 考 文 献

1 H. Heffes and D. M. Lucantoni, "A Markov Modulated Characterization of Packetized Voice and Data Traffic and Related Statistical Multiplexer Performance", IEEE Journal on Selected Areas in Communications, Vol. SAC-4, NO. 6, September. 1986. 856～868

2 Blondie C. The N/G/1 Finite Capacity Queue, Commun. Stat-Stochast. Models, 1989, 5(2): 273～294

3 孟玉珂．排队论基础及应用．上海：同济大学出版社，1989. 232～240

4 Chaudhry M L, Templeton J G C. A First Course in Bulk Queues. New York: John Wiley & Sons Inc. 1983. 112～115

5 Yegenoglu F, Jabbari B. Performance Evaluation of MMPP/D/1/K Queues for Aggregate ATM Traffic Models. Proceedings of INFOCOM, 1993

6 Hideaki Takage. Queueing Analysis. Vol. 2, NORTH-HOLLAND AMSTERDAM. TOKYO: 1991. 412～426