(19) 113－119

函数 Hilbert 空间上共轭复合算子的次正常性*

The Subnormality of Conjugate Composite Operators in functional Hilbert Space

O177.1

傅 强[①]　　张崇甫[②]　　向奇汉[①]
Fu Qiang　　Zhang Congfu　　Xiang Qihan

（①重庆大学系统工程及应用数学系，重庆，630044；②重庆高等建筑专科学校，第一作者 33 岁，男，副教授，硕士）

摘 要 给出了函数 Hilbert 空间上共轭复合算子为次正常的充要条件，推广了 Cowen 的主要结果，讨论了 Hardy 空间 $H^2(D)$ 及 Bergman 空间 $L_a^2(D)$ 上的几个复合算子的次正常性。

关键词 Hilbert 空间；次正常算子；再生核

中国图书资料分类法分类号 O177.2

希尔伯特空间
共轭复合算子，~~次正常性~~

ABSTRACT A necessary and sufficient condition is given that conjugate composite operators is subnormal in functional Hilbert space. The main result of Cowen is extended. Moreover, this paper has also discussed that the subnormality of some composite operators in Hardy space $H^2(D)$ and Bergman space $L_a^2(D)$.

KEYWORDS Hilbert space; subnormal operators; reproducing kernel

0 引 言

设 H 是一个 Hilbert 空间，S 是 H 上的有界线性算子，若存在 Hilbert 空间 $K \supset H$ 及 K 上的正常算子 N，使 $NH \subset H$，$N|_H = S$，则算子 S 为 H 上次正常算子。

算子的次正常性有许多判定条件[1~3]，但对复杂的算子，这些判定条件往往无法使用；有时对一些常见的算子，比如 Toeplitz 算子，复合算子等算子的次正常性，现在也没有简易的判定条件。

本文的目的是给出函数 Hilbert 空间上复合算子的共轭算子为次正常的一个充要条件，并推广文[1] 的主要结果，讨论几个具体算子的共轭复合算子的次正常性。

设 X 是一个集合，X 上的一个函数 Hilbert 空间是 X 上的一些函数（而不是函数的某种等价类）构成的 Hilbert 空间，它使得对任何 $y \in X$，赋值泛函

$$P_y(f) = f(y), f \in H$$

* 收文日期 1996-03-15

都是 H 上的有界线性泛函，从而根据 Riesz 表示定理[4]，存在 H 中的元 k_y（称为在点 y 的赋值核）使 $f(y) = (f, k_y), f \in H$

函数 $K(x,y) = K_y(x), x, y \in X$，称为 H 的再生核。再生核是 $X \times X$ 上具有下述意义的正定函数：对 X 中的任何有限个元 $x_1, \cdots, x_s$，矩阵

$$\widetilde{K}(x_1, \cdots, x_s) = (K(x_i, x_j))_{s\times s} \tag{1}$$

是正定的。反之若 X 为一集合，$K: X \times X \to C$ 为正定函数，则存在 X 上的函数 Hilbern 空间 H 正好以 K 为再生核。H 称为 K 的再生核 Hilbern 空间，有关函数 Hilbern 空间及再生核的一些基本性质可参考文[2,3]。

设 X 是一个集合，H 是 X 上的一个函数 Hilbern 空间，$\varphi: X \to X$ 为映射，若对任何 $f \in H$，f 与 φ 的复合 $f \circ \varphi$ 仍然属于 H，则公式

$$C_\varphi f = f \circ \varphi, f \in H \tag{2}$$

定义了 H 上的一个有界线性算子 C_φ，称为由 φ 导出的 H 上的复合算子。关于复合算子的一些基本性质可参考文[5]。

为叙述本文的结果，还需用到矩序列的概念。实数列 $t_1, \cdots, t_n, \cdots$ 称为矩序列，假若存在 R^1 上的测度 μ（本文除非特别指明，测度均指有限正则正 Borel 测度），使

$$t_n = \int_{R^1} t^n \mathrm{d}\mu(t) \qquad n = 0, 1, 2, 3, \cdots \tag{3}$$

由 Hamburger 矩定理 $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为矩序列，当且仅当

$$\varphi(n, m) = t_{n+m}, \qquad n, m \in N_0 = N \cup \{0\}$$

是 $N_0 \times N_0$ 上的正交函数。关于矩序列可参见文[2]。

设 H 是一个 Hilbern 空间，Q 称为 R^1 上的正算子值测度是指：对 R^1 中任何 Borel 集 $\triangle$，$Q(\triangle)$ 是 H 上有界正算子，且对任何 $f \in H$，$(Q(\cdot)f, f)$ 是 R^1 上有限正则正 Borel 测度。设 A_0，$A_1, \cdots, A_n, \cdots$ 是 H 上的自伴算子序列，若存在 R^1 上正算子值测度 Q，使

$$A_n = \int_{R^1} t^n \mathrm{d}Q(t) \qquad n \in N_0 \tag{4}$$

则称 $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为 H 上的算子矩序列。等式(4)理解为对所有

$$f \in H, (A_n f, f) = \int_{R^1} t^n \mathrm{d}(Q(t)f, f) \qquad n \in N_0$$

1 主要结果

设 H 是集 X 上以 K 为再生核的函数 Hilbern 空间，$\varphi: X \to X$ 为映射，C_φ 是由 φ 导出的 H 上的复合算子。记 $\varphi_n = \varphi o \varphi o \cdots o \varphi$ 为 n 个 φ 的复合，φ_0 是 X 上的恒等映射，设 l 为自然数，$X^l = X \times X \times \cdots \times X$ 为 l 个 X 的 Descartes 直积，若 $x^l = (x_1, \cdots, x_l) \in X^l$，用 $\widetilde{K}(\varphi_n(x^l))$ 记 $l \times l$ 矩阵 $\widetilde{K}(\varphi_n(x_1), \cdots, \varphi_n(x_l))$。

定理 1 C_φ^* 为次正常的充要条件是：$\forall\, l \in N, \forall\, x^l = (x_1, \cdots, x_l) \in X^l$ 及任意 $C = (c_1, \cdots, c_l) \in c^l$，序列

$$(\widetilde{K}(\varphi_n(x^l))c, c), \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

都是 $[0, \| C_\varphi \|^2]$ 上某个测度的矩序列，其中 $(\cdot, \cdot)$ 表示 C^l 作为 l 一维 Hilbern 空间的通常内

积。

定理 2　C_φ^* 为次正常的充要条件是：对任意自然数 l，任意 $x^l \in X^l$

$$\{\widetilde{K}(\varphi_n(x^l))\}_{n=0}^{\infty}$$

都是$[0,\|C_\varphi\|^2]$上某个正算子值测度的(算子值)矩序列。

定理 3　C_φ^* 为次正常的充要条件是：$\forall\, l \in N, n \in N_0$ 及 $x^l \in X^l$，$(n+1)l \times (n+1)l$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} \widetilde{K}(\varphi_0(x^l)) & \widetilde{K}(\varphi_1(x^l)) & \cdots & \widetilde{K}(\varphi_n(x^l)) \\ \widetilde{K}(\varphi_1(x^l)) & \widetilde{K}(\varphi_2(x^l)) & \cdots & \widetilde{K}(\varphi_{n+1}(x^l)) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \widetilde{K}(\varphi_n(x^l)) & \widetilde{K}(\varphi_{n+1}(x^l)) & \cdots & \widetilde{K}(\varphi_{2n}(x^l)) \end{pmatrix} \tag{5}$$

都是正定的。

推论 1　H_1 是 X 上的一个函数 Hilbert 空间，K_1 是 H_1 的再生核，$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ 解析，$a_n \geqslant 0$，$K_1 = F\circ K$，则当 C_φ^* 在 H 上次正常，且 C_φ 在 H_1 上有界时，C_φ^* 在 H_1 上也是次正常的。

证　这是文[1]的结果。只需用如下引理并利用定理 3 即可得到推论 1。

引理　若$(a_{ij})_{K\times K}$为正定矩阵，F 为推论 1 所述，则$(F(a_{ij}))_{K\times K}$仍然是正定的。

证明见文[2]。

推论 2　若 C_φ^* 次正常，则 $\forall\, x \in X$，序列$\{K(\varphi_n(x),\varphi_n(x))\}_{n=0}^{\infty}$都是$[0,\|C_\varphi\|^2]$上某个测度的矩序列。

证　在定理 1 或定理 2 中取 $l=1$ 即可。

推论 3　若 C_φ^* 次正常，则 $\forall\, x \in X$ 及 $n \in N$ 有

$$(K(\varphi_n(x),\varphi_n(x)))^2 \leqslant K(\varphi_{n-1}(x),\varphi_{n-1}(x))K(\varphi_{n+1}(x),\varphi_{n+1}(x))$$

证　用推论 2 及 Schwartz 不等式可得证。

2　主要结果的证明

引理1　设$\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$是Hilbert空间 H 上的自伴算子序列，则$\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$是区间$[a,b]$上的正算子值矩序列的充要条件是对每个 $f \in H$，数列$\{(A_nf,f)\}_{n=0}^{\infty}$均为$[a,b]$上的矩序列。

证　必要性显然，下证充分性。

由假设，对每个 $f \in H$，存在$[a,b]$上的测度 μ_f，使

$$(A_nf,f)=\int_b^a x^n \mathrm{d}\mu_f(x) \qquad n=0,1,2,\cdots$$

由于(A_nf,g)为 H 上正定双线性泛函，且

$$\begin{aligned}&(A_n(f+g),(f+g))+(A_n(f-g),(f-g))\\&=2(A_nf,f)+2(A_ng,g)\end{aligned}$$

所以

$$\int_b^a x^n \mathrm{d}\mu_{f+g}(x)+\int_b^a x^n \mathrm{d}\mu_{f-g}(x)$$

$$=2\int_b^a x^n d\mu_f(x)+2\int_b^a x^n d\mu_g(x)$$

对所有的 $n\geqslant 0$ 成立，于是 $\mu_{f+g}+\mu_{f-g}=2(\mu_f+\mu_g)$

从而对任何 Borel 集 $\triangle\subset[a,b]$，等式

$$\mu_{f,g}(\triangle)=\frac{1}{4}\sum_{K=0}^{3}i^k\mu_f+i^kg(\triangle),\quad f,g\in H$$

定义了 H 上有界正定双线性泛函，因此存在 H 上有界正算子 $Q(\triangle)$，使

$$\mu_{f,g}(\triangle)=(Q(\triangle)f,g),f,g\in H$$

故 $Q(\triangle)$ 是$[a,b]$上正算子值测度，且

$$A_n=\int_b^a x^n dQ(x),n=1,2,3,\cdots$$

引理 2 设$\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$是 Hilbern 空间 H 上自伴算子序列，且存在实数 $a>0$，使 $\|A_n\|\leqslant a^n,n=0,1,2,\cdots$，则$\{A_n\}$ 为矩序列当且仅当对每个 $n\in N_0$，算子矩阵

$$\begin{bmatrix}A_0 & A_1 & \cdots & A_n\\ A_1 & A_2 & \cdots & A_{n+1}\\ A_n & A_{n+1} & \cdots & A_{2n}\end{bmatrix}\tag{6}$$

都是 $H_{(n+1)}=H\oplus H\oplus\cdots\oplus H$ 上的正算子。

证 充分性

由于对每个 $n\geqslant 0$，矩阵(6)都在 $H_{(n+1)}$ 上正定，从而对每个 $f\in H$，$\{(A_nf,f)\}_{n=0}^{\infty}$都是矩序列，由于

$$|(A_nf,f)|\leqslant\|f\|^2a^n,\qquad n\geqslant 0$$

由引理 1，$\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$为算子值矩序列。

反之，若$\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$为算子值矩序列，由引理 1 对每个 $f\in H$，$\{(A_nf,f)\}_{n=0}^{\infty}$都是$[-a,a]$上的矩序列。要证明对任何 $n\geqslant 0$，及 $f_0,f_1,\cdots,f_n\in H$，矩阵

$$((A_{j+k}f_j,f_k))_{0\leqslant j,k\leqslant n}$$

都是正定的。

设 $A_n=\int_b^a x^n dQ(x),n\geqslant 0$，令

$$\mu_{j,k}(\triangle)=(Q(\triangle)f_j,f_k)$$

其中 $\triangle$ 为$[-a,a]$中的 Borel 集，则 $\mu_{j,k},0\leqslant j,k\leqslant n$ 均为$[-a,a]$上的复测度，取$[-a,a]$上正测度 μ 使

$$\mu_{j,k}\ll\mu,0\leqslant j,k\leqslant n$$

令 $h_{jk}=d\mu_{jk}/d\mu$，对$[-a,a]$上任何连续函数 u，令

$$P(u)=\int_b^a u dQ$$

则当 $u\geqslant 0$ 时 $P(u)\geqslant 0$. 如果 u 在$[-a,a]$上连续，则

$$(P(u)f_j,f_k)=\int u d\mu_{jk}=\int uh_{jk}d\mu$$

如果 $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in C$ 且 $u\geqslant 0$，则

$$\sum_{j,k}\left(\int_{0}^{a} u h_{jk}\mathrm{d}\mu\right)\lambda_j\bar{\lambda}_k = \left\|\sum_j P(u)^{1/2}\lambda_j f_j\right\|^2 \geqslant 0$$

从而关于 μ 矩阵 $(h_{jk}(t))_{j,k=0}^{n}$ 几乎处处是正定的，所以

$$\sum_{j,k} h_{jk}(t)t^{j+k} \geqslant 0$$

关于 μ 几乎处处成立，于是对 $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n \in C$ 有

$$\begin{aligned}
&\sum_{j,k}\lambda_j\bar{\lambda}_k(A_{j+k}f_j,f_k)\\
&=\sum_{j,k}\lambda_j\bar{\lambda}_k\int_{-a}^{a} t^{j+k}\mathrm{d}\mu_{jk}(t)\\
&=\int_{-a}^{a}\sum_{j,k}\lambda_j\bar{\lambda}_k h_{jk}(t)t^{j+k}\mathrm{d}\mu(t) \geqslant 0
\end{aligned}$$

即 $((A_{j+k}f_j,f_k))_{j,k=0}^{n}$ 是正定的，换言之 $\{A_{j+k}\}_{j,k=0}^{n}$ 是 H^{n+1} 上的正算子，必要性证毕。

引理 3　设 S 是 Hilbert 空间上的有界线性算子，则 S 为次正常的充要条件是 $\{S^{*n}S^n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 $[0,\|S\|^2]$ 上的正算子测度的矩序列。

证明见文[6]。

引理 4　设 S 是 Hilbern 空间 H 上的有界线性算子，则 S 为次正常的充要条件是对 H 的某个稠子集 H_0 中的每个 f 序列 $\{\|S^n f\|^2\}_{n=0}^{\infty}$ 都是 $[0,\|S\|^2]$ 上的某个测度的矩序列。

证　必要性由引理 1、引理 3 可得，下证充分性。

设 f 为 H 中的任意一个元，取 H_0 中序列 f_k 使得 $f_k \to f$，于是 $\|S^n f_k\|^2 \to \|S^n f\|^2$，由于 $\{\|S^n f_k\|^2\}_{n=0}^{\infty}$ 均为 $[0,\|S\|^2]$ 上某个测度的矩序列，所以由文[2]知 $\{\|S^n f\|^2\}_{n=0}^{\infty}$ 仍为 $[0,\|S\|^2]$ 上某个测度的矩序列，由引理 1 及引理 3 知 S 为次正常。

定理 1 的证明：

取 $x^l=(x_1,\cdots,x_l)\in X^l, C=(c_1,\cdots,c_l)\in C^l$，而

$$h=\sum_{i=1}^{l}C_iK_{x_i} \tag{7}$$

由于 $\forall x\in X$ 有 $C_\varphi^* K_x = K_{\varphi(x)}$，故 $C_\varphi^{*n}K_x = K\varphi_n(x)$，但是形如(7)的元在 H 中稠密，由引理 4，C_φ^* 次正常当且仅当对每个形如(7)的元 h，序列　$\|C_\varphi^{*n}h\|^2$
都是矩序列。而

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi^{*n}h\|^2 &=(C_\varphi^{*n}h,C_\varphi^{*n}h)\\
&=\left(C_\varphi^{*n}\sum_{i=1}^{l}C_iK_{x_i},C_\varphi^{*n}\sum_{j=1}^{l}C_jK_{x_j}\right)\\
&=\left(\sum_{i=1}^{l}C_iK_{\varphi_n(x_i)},\sum_{j=1}^{l}C_jK_{\varphi_n(x_j)}\right)\\
&=\sum_{i,j=1}^{l}C_i\overline{C}_j(K_{\varphi_n(x_i)},K_{\varphi_n(x_j)})\\
&=\sum_{i,j=1}^{l}C_i\overline{C}_jK(\varphi_n(x_i),\varphi_n(x_j))\\
&=(\widetilde{K}(\varphi_n(x^l))C,C)
\end{aligned}$$

定理 1 证毕。

定理 2 由定理 1 及引理 1 可得。

定理 3 由定理 2 及引理 2 可得。

3 Hardy 空间和 Bergman 空间上复合算子的次正常性

典型的函数 Hilbert 空间是开单位圆 D 上的 Hardy 空间 $H^2(D)$ 和 Bergman 空间 $L_a^2(D)$，这两个空间都是由 D 上的一些解析函数构成的。由定义，$H^2(D)$ 是由 D 上幂级数的展式 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 的系数满足 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2<+\infty$ 的所有解析函数构成的复 Hilbert 空间，$L_a^2(D)$ 是由幂级数的展式 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 的系数满足 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a_n|^2}{n+1}<+\infty$ 的所有解析函数构成的复 Hilbert 空间，这两个空间的再生核分别是

$$\begin{aligned}K_1(x,y)&=\frac{1}{1-xy}\\ K_2(x,y)&=\left(\frac{1}{1-xy}\right)^2\end{aligned}\tag{8}$$

设 $\varphi:D\to D$ 为映射，则 C_φ 在 $H^2(D)(L_a^2(D))$ 上有界的充要条件是 φ 解析[6]，由于 $K_2=K_1^2$，所以由推论 1 有

定理 7[1] 若 $\varphi:D\to D$ 解析，则当 C_φ^* 在 $H^2(D)$ 上次正常时，C_φ^* 在 $L_a^2(D)$ 上也是次正常的。特别地，若 C_φ^* 在 $H^2(D)$ 上正常或拟正常，则 C_φ^* 在 $L_a^2(D)$ 上次正常。

在文[7]中，Deddens 证明了，若 $\varphi(z)=az+b$，则 C_φ^* 在 $H^2(D)$ 上次正常，当且仅当 $b=0$ 或 $0<a<1$ 而 $|b|=1-a$，可以证明这个结果对 $L_a^2(D)$ 也是成立的。

定理 8 若 $\varphi(z)=az+b$，$|a|+|b|\leqslant 1$，则 C_φ^* 在 $L_a^2(D)$ 上次正常当且仅当 $b=0$(此时 C_φ^* 正常) 或 $0<a<1$ 而 $|b|=1-a$.

证：必要性由定理 7 及 Deddens 的结果导出，此处给出一个直接证明。

若 C_φ^* 次正常，则由推论 3 及(8)式，序列

$$\left\{\frac{1-|\varphi_n(z)|^2}{1-|\varphi_{n+1}(z)|^2}\right\}_{n=0}^{\infty}\tag{9}$$

是 D 上单调递增的函数列，若 $a=1$，则显然 $b=0$，若 $a\neq 1$，则

$$\varphi_n(z)=a^nz+b\left(\frac{1-a^n}{1-a}\right)$$

所以

$$\frac{1-|z|^2}{1-|az+b|^2}\leqslant\frac{1-\left|a^nz+b\dfrac{1-a^n}{1-a}\right|^2}{1-\left|a^{n+1}z+b\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}\right|^2}\tag{10}$$

对所有自然数成立。若 $b\neq 0$，则 $|a|<1$，假若 $|b|\neq|1-a|$，在(10)式中令 $n\to\infty$，则有

$$|az+b|^2\leqslant|z|^2$$

$\forall z\in D$ 成立，矛盾。于是必有 $|b|=|1-a|$，从而由

$$1\leqslant|a|+|1-a|=|a|+|b|\leqslant 1$$

可知 $0\leqslant a\leqslant 1$，由于 $b\neq 0$，所以 $a<1$，再由 φ 将 D 映射到 D 内，可知 $|b|<1$，从而 $a>0$，

必要性得证。

充分性，若 $b=0$，显然 C_φ^* 是一个对角算子，从而在 $L_a^2(D)$ 上次正常(正常)。若 $b\neq 0$，令 $b=(1-a)c$，其中 $|c|=1$，故 $\varphi_0(z)=cz$，则 C_{φ_0} 为 $L_a^2(D)$ 上的酉算子，且

$$C_{\varphi_0}^* C_\varphi^* C_{\varphi_0}=C_{\varphi_1}^*$$

其中 $\varphi_1(z)=az+(1-a)$，于是可以假定 $c=1$，此时

$$\varphi_n(z)=a^n z+1-a^n=a^n(z-1)+1$$
$$=1-a^n(1-z)$$

注意到 $R_e z>0$ 时

$$\frac{1}{K!}\int_0^{+\infty} t^k e^{-zt}\mathrm{d}t=\frac{1}{z^{k+1}}$$

所以对任意复数 $\xi_1,\cdots,\xi_m\in C$，$z_1,\cdots,z_m\in D$，当令 $\lambda_i=1-z_i$ 时，有 $R_e\lambda_i>0$，且

$$\sum_{i,j=1}^{m}\xi_i\bar{\xi}_j(\varphi_n(z_i),\varphi_n(z_j))$$
$$=\sum_{i,j=1}^{m}\xi_i\bar{\xi}_j\left(\frac{1}{1-(1-a^n\lambda_i)(1-a^n\bar{\lambda}_j)}\right)^2$$
$$=\sum_{i,j=1}^{m}\xi_i\bar{\xi}_j\sum_{l=1}^{\infty}(l+1)a^{n(l-2)}\frac{(\lambda_i\bar{\lambda}_j)^l}{(\lambda_i+\bar{\lambda}_j)^{l+2}}$$
$$=\sum_{l=1}^{\infty}a^{n(l-2)}\sum_{i,j=1}^{m}(l+1)\xi_i\bar{\xi}_j(\lambda_i\bar{\lambda}_j)^l\frac{1}{(l+1)!}\int_0^{+\infty}t^{l+1}e^{-(\lambda_i+\bar{\lambda}_j)t}\mathrm{d}t$$
$$=\sum_{l=1}^{\infty}a^{n(l-2)}\frac{1}{l!}\int_0^{+\infty}\left|\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\xi_i e^{-\lambda_i t}\right|t^{l+1}\mathrm{d}t$$
$$=\int x^n\mathrm{d}\mu(x)$$

其中 μ 是$[0,a^{-2}]$上的 $\vec{C}$ 测度，使

$$\mu(\{a^{l-2}\})=\frac{1}{l!}\int_0^{\infty}\left|\sum_{i=1}^{m}\xi_i\lambda_i e^{-\lambda_i t}\right|^2 t^{l+1}\mathrm{d}t$$

$l=0,1,2,3,\cdots$. 在集$\{a^{l-2}|l=0,1,2,\cdots\}$的余集上，$\mu$ 的值为零。于是由定理 1 可知 C_φ^* 在 $L_a^2(D)$ 上为次正常。

参 考 文 献

1 Cowen C C. Transfering Subnormality of adjoint composition operators. Integer equat. oper. Th. 1992, 15(1): 167～171

2 Berg. Christensen. Russel. Harmonic analysis on semigroups. New York: Springer-Verlag, 1984. 79～183

3 Halmos P R. A Hilbert Space Problem Book. Prinston: Jan Northtrand, 1967. 203～317

4 张恭庆，郭懋正．泛函分析讲义：下册．北京：北京大学出版社，1990. 365～489

5 Nordgrew E A. Composition operators on Hilbert space. Lecture Notes in Math, 693, Berlin: Springer-Verlag, 1978. 37～63

6 Conway J B. Subnornal operators. Boston: Pitman, 1981. 1～45

7 Deddens J A. Analytic toeplitz and composition operators. Conadian J. Math 1972, 24: 859～865