1996 年 11 月　　重庆大学学报　（自然科学版）　　Vol. 19, №. 6
第 19 卷第 6 期　　Journal of Chongqing University (Natural Science Edition)　　Nov. 1996

(20) 120－124

不具强制性条件的 Hammerstein 积分方程的解*

The Solution of Hammerstein Integral Equation without Coercive Conditions

O175.5

舒永录
Shu Yonglu
（重庆大学系统工程及应用数学系，重庆，630044；33 岁，男，讲师，硕士）

摘　要　在自反 Banach 空间的框架下建立了极大单调且 3^*—单调算子的一个值域定理，用此定理并注意到 Nemyckii 算子的 3^*—单调性，在空间 $L_p(G)$（$1<p<\infty$，$G\subset R^n$ 有界开）中证明了不具强制性条件的 Hammerstein 积分方程解的存在性。

关键词　极大单调；3^*—单调；Hammerstein 积分方程
中国图书资料分类法分类号　O175.5

ABSTRACT　An abstract range theorem for maximal monotone and 3^*—monotone operators is proved in the real reflexive Banach spare, using this theorem and the 3^*—monotonicity of Nemyckii operator, the existence of soldtion of Hammerstein integral equation without corecive condition is proved in $L_p(G)$ with $1<p<\infty$, and $G\subset R^n$ is open bounded.

KEYWORDS　maximal monotonicity; 3^*—monotonicity; Hamerstein integral equation

0　引　　言

关于 Hammerstein 积分方程的研究已有许多结果[4-6]，其一般方法大致可分为紧性条件法和单调算子法，前者转换成不动点问题，后者转换成非线性算子方程。当用单调算子法时，常需加上强制性条件。文[3]的 Th32.0 证明了在 Hilbert 空间中，强制性条件可以去掉。本文的目的是将此结论推广到自反 Banach 空间中去，同时还得到一些相应的抽象定理的推广。

1　主要结论

定义 1　设 X 是实自反 Banach 空间，$M\subset X$ 是非空子集，$A:M\to 2^{X^*}$ 是集值映射，$D(A)=\{u\in M; Au\neq\varnothing\}$ 称为 A 的有效定义域。

若

* 收文日期　1996-03-04

$$\langle u^* - v^*, u - v\rangle \geqslant 0 \qquad \forall\, u,v \in M, u^* \in Au, v^* \in Av$$

则称 A 是单调的。若 A 单调，且对 $(u,u^*) \in M \times X^*$，由 $\langle u^* - v^*, u - v\rangle \geqslant 0 \quad \forall\, v \in M$，$v^* \in Av$，得 $u \in D(A) \subset M$，$u^* \in Au$，则称 A 是极大单调的。

若 $A: X \to 2^{X^*}$ 单调，且

$$\sup_{(v,v^*)\in G(A)} \langle v^* - u^*, w - v\rangle < \infty \qquad \forall\, w \in D(A), u^* \in R(A)$$

则称 A 是 3^*— 单调的。

这里 $G(A) = \{(u,u^*) \in X \times X^*, u^* \in Au\}$ 称 A 的图象，$R(A) = \bigcup_{u \in D(A)} Au$，称 A 的值域。

定义 2　设 S,T 是拓扑空间 X 的两个子集，如果 $\mathrm{int}S = \mathrm{int}T$，$\overline{S} = \overline{T}$，则称 S 与 T 几乎相等，记 $S \cong T$。

定理 1　设 X 是实自反 Banach 空间，且

1) $A: D(A) \subset X \to 2^{X^*}$，$B: D(B) \subset X \to 2^{X^*}$ 均是极大单调且 3^*— 单调的。

2) $A + B: D(A + B) \subset X \to 2^{X^*}$ 极大单调

则　$R(A + B) \cong R(A) + R(B)$

特别地，若 $R(A) \supset X^*$，或 $R(B) = X^*$，则 $R(A + B) = X^*$.

推论 1　将 A 3^*— 单调改为 $D(A) \subset D(B)$ 定理 1 的结论也正确。

定理 2　设 X 是实自反 Banach 空间，$F: X \to 2^{X^*}$，$K: X^* \to 2^X$ 是极大单调的，$D(K) = X^*$，$D(F) = X$，且 K,F 之一是 3^*— 单调的，$I: X \to X$ 是恒等算子。

则　$R(I + KF) = X$

定理 3　设 $G \subset R^n$ 是有界区域，$1 < p,q < \infty$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(H_1)　$k: G \times G \to R$ 使得它产生的积分算子

$$(KU)(x) = \int_G k(x,y)u(y)\mathrm{d}y$$

是 $L_p(G)$ 到 $L_q(G)$ 的线性单调算子。

(H_2)　$f: G \times R \to R$　满足 Caratheodory 条件且存在 $a \in L_q(G)$ 非负，及常数 $b \geqslant 0$ 使得

$$|f(y,u)| \leqslant a(y) + b|u|^{p-1} \qquad \forall\ (y,u) \in G \times R$$

则　$\forall\, v \in L_p(G)$ 方程

$$U(x) + \int_G k(x,y)f(y,u(y))\mathrm{d}y = v(x) \qquad x \in G$$

在 $L_p(G)$ 中有解。

2　主要结果的证明

引理 1[1]　自反 Banach 空间 X 可以重新赋等价范数使得 X、X^* 均为局部一致凸空间，从而是严格凸的。

以下均设所讨论的空间是严格凸的。

引理 2[2]　设 X 是自反 Banach 空间，J 是其正规对偶算子，即 $J: X \to X^*$ 满足 $\langle Jx, x\rangle = \|x\|^2 = \|Jx\|^2$，$A: D(A) \subset X \to 2^{X^*}$ 是单调映射。则 A 是极大单调的，当且仅当 $R(A + \varepsilon J)$

$= X^*, \forall\ \varepsilon > 0.$

引理 3[3] 设 X 是实自反 Banach 空间，

1) 若 $u_n \rightharpoonup u \in X, f_n \to f \in X^*$，则 $\langle f_n, u_n \rangle \to \langle f, u \rangle$

2) 若 $u_n \to u \in X, f_n \rightharpoonup f \in X^*$，则 $\langle f_n, u_n \rangle \to \langle f, u \rangle$

引理 4 设 X 是实自反 Banach 空间，$A: X \to 2^{X^*}$ 是极大单调映射，则

1) 若 $u_n^* \in Au_n, u_n \rightharpoonup u, u_n^* \to u^*$，则 $u \in D(A)$ 且 $u^* \in Au$

2) 若 $u_n^* \in Au_n, u_n \to u, u_n^* \rightharpoonup u^*$，则 $u \in D(A)$ 且 $u^* \in Au$

引理 5 设 X 是实自反 Banach 空间，$C: D(C) \subset X \to 2^{X^*}$ 是极大单调映射，$S \subset X^*$ 是任一子集，若 $\forall\ u^* \in S, \exists\ w \in X$ 使得

$$\sup_{(v,v^*) \in G(C)} \langle v^* - u^*, w - v \rangle < \infty \tag{1}$$

则

$$\mathrm{co}S \subset \overline{R(C)} \qquad \mathrm{int}(\mathrm{co}S) \subset R(C)$$

其中 $\mathrm{co}S = \{\Sigma t_i u_i^* \mid u_i^* \in S, t_i \geqslant 0, \Sigma t_i = 1$ 有限项求和$\}$，称 S 的凸包。

证明 I $\mathrm{co}S \subset \overline{R(C)}$

$\forall\ u^* \in \mathrm{co}S$，则 $u^* = \Sigma t_i u_i^*, u_i^* \in S, t_i \geqslant 0, \Sigma t_i = 1$，且是有限项求和，由假设(1)知对每个 $u_i^* \in S$ 存在 $w_i \in X$ 及当数 $c_i > 0$ 使得

$$\langle v^* - u_i^*, w_i - v \rangle \leqslant c_i, \quad \forall\ (v, v^*) \in G(C)$$

取 $w = \Sigma t_i w_i \in X$，则

$$\begin{aligned}
&\langle v^* - u^*, w - v \rangle = \langle v^*, w - v \rangle - \langle u^*, w - v \rangle \\
&= \Sigma t_i \langle v^*, w_i - v \rangle + \langle u^*, v \rangle - \langle u^*, w \rangle \\
&\leqslant \Sigma t_i [c_i + \langle u_i^* - w_i \rangle - \langle u_i^*, v \rangle] + \langle u^*, v \rangle - \langle u^*, w \rangle \\
&= \Sigma t_i c_i + \Sigma t_i \langle u_i^*, w_i \rangle - \langle u^*, w \rangle \leqslant M, \forall\ (v, v^*) \in G(C)
\end{aligned} \tag{2}$$

由引理 2 知存在 $v_\varepsilon \in D(C)$ 使得

$$Cv_\varepsilon + \varepsilon J v_\varepsilon = u^*, \text{从而 } u^* - \varepsilon J v_\varepsilon \in Cv_\varepsilon \tag{3}$$

取 $(v_\varepsilon, u^* - \varepsilon J v_\varepsilon) \in G(C)$ 代入(2)得

$$\langle -\varepsilon J v_\varepsilon, w - v_\varepsilon \rangle \leqslant M$$

从而

$$\begin{aligned}
\langle -\varepsilon J v_\varepsilon, v_\varepsilon \rangle &\leqslant M + \langle \varepsilon J v_\varepsilon, w \rangle \leqslant \varepsilon \| J v_\varepsilon \| \, \| w \| + M \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} [\| J v_\varepsilon \|^2 + \| w \|^2] + M
\end{aligned}$$

故

$$\frac{\varepsilon}{2} \| J v_\varepsilon \|^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \| w \|^2] + M \leqslant \frac{1}{2} \| w \| + M \quad (\text{不妨设 } \varepsilon \leqslant 1)$$

所以

$$\sqrt{\varepsilon} \| J v_\varepsilon \| \leqslant (M + \| w \|)^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

于是 $\| \varepsilon J v_\varepsilon \| = \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon} \| J v_\varepsilon \| \to 0$，从而由(3)得

$$u^* = \lim_{\varepsilon\to 0}(u^* - \varepsilon J v_\varepsilon) \in \overline{R(C)}$$

证明 I　$\mathrm{int}(\mathrm{co}S) \subset R(S)$

$\forall\, u^* \in \mathrm{int}(\mathrm{co}S)$，则存在 $r > 0$ 使得 $\forall\, w^* \in X^*$，$\|w^*\| < r$ 时，$u^* + w^* \in \mathrm{co}S$，从而存在 $u_i^* \in S$，$t_i \geqslant 0$，使得 $u^* + w^* = \Sigma t_i u_i^*$（这里 Σ 是有限项求和）。

由引理2知存在 $v_\varepsilon \in D(C)$ 使得

$$Cv_\varepsilon + \varepsilon J v_\varepsilon = u^*\text{，从而}\quad u^* - \varepsilon J v_\varepsilon \in C v_\varepsilon$$

由假设(1)知存在 $w_i \in X$，$c_i > 0$，使得

$$\langle v^* - u_i^*, w_i - v\rangle \leqslant c_i \qquad \forall\,(v,v^*) \in G(C)$$

和 1 一样，令 $w = \Sigma t_i w_i$ 得

$$\langle v^* - u^* - w^*, w - v\rangle \leqslant M \qquad \forall\,(v,v^*) \in G(C)$$

将 $(v_\varepsilon, u^* - \varepsilon J v_\varepsilon) \in G(C)$ 代入上式得

$$\langle -\varepsilon J v_\varepsilon - w^*, w - v_\varepsilon\rangle \leqslant M$$

从而

$$\langle w^*, v_\varepsilon\rangle \leqslant M + \langle w^*, w\rangle - \langle \varepsilon J v_\varepsilon, v_\varepsilon\rangle \leqslant M_1$$

故 $\{\langle w^*, v_\varepsilon\rangle\}_{0<\varepsilon<1}$ 有界。由一致有界定理知 $\{v_\varepsilon\}$ 有界，从而有子列 $v_{\varepsilon_i} \rightharpoonup v \in X$，由 1 知 $u^* - \varepsilon J v_\varepsilon \in C v_\varepsilon$，$u^* - \varepsilon J v_\varepsilon \to u^*$，由 C 极大单调及引理4知 $v \in D(C)$ 且 $u^* \in C(v)$，从而 $u^* \in R(C)$。

证毕

定理1的证明

显然，$R(A+B) \subseteq R(A) + R(B)$，因此有 $\overline{R(A+B)} \subseteq \overline{R(A)+R(B)}$，$\mathrm{int}R(A+B) \subseteq \mathrm{int}(R(A)+R(B))$。于是只须证明

$$\overline{R(A+B)} \supseteq \overline{R(A)+R(B)},\ \mathrm{int}R(A+B) \supset \mathrm{int}(R(A)+R(B))$$

就行了，而这只须证明

$$R(A)+R(B) \subseteq \overline{R(A+B)},\ \mathrm{int}(R(A)+R(B)) \subseteq R(A+B) \tag{5}$$

为此取 $C = A + B$，$S = R(A) + R(B)$ 用引理5。

由假设知 C 是极大单调的，$\forall\, u^* \in S = R(A) + R(B)$，则存在 $u_A^* \in R(A)$，$u_B^* \in R(B)$，使得 $u^* = u_A^* + u_B^*$，取 $w \in D(A) \cap D(B)$，由于 A，B 均为 3^*—单调的，得

$$\sup_{(v,v^*)\in G(A)} \langle v^* - u_A^*, w - v\rangle < \infty \qquad \sup_{(v,v^*)\in G(B)} \langle v^* - u_B^*, w - v\rangle < \infty$$

从而

$$\begin{aligned}\sup_{(v,v^*)\in G(C)} \langle v^* - u^*, w - v\rangle &= \sup_{(v,v^*)\in G(C)} \langle v^* - u_A^* - u_B^*, w - v\rangle \\ &\leqslant \sup_{(v,v^*)\in G(A)} \langle v^* - u_A^*, w - v\rangle + \sup_{(v,v^*)\in G(B)} \langle v^* - u_B^*, w - v\rangle < \infty\end{aligned}$$

于是引理5的条件全满足，从而(5)成立，证毕。

推论1的证明

由定理1的证明知：只须证明(5)就行了，这里仍用引理5，由假设 $C = A + B$ 是极大单

调的，$\forall\ u^* \in S = R(A) + R(B)$，取 $w \in R(A) \subset R(B)$，使得 $u_A^* \in A(w)$，$u_B^* = u^* - u_A^* \in R(B)$，由 A 单调得 $\langle v^* - u_A^*, v - w\rangle \geqslant 0$，从而 $\langle v^* - u_A^*, w - v\rangle \leqslant 0$，$\forall\ (v,v^*) \in G(A)$. 由 $C = A + B$，故 $\forall\ (v,v^*) \in G(C)$，存在 $v \in D(A) \subset D(B)$，使得 $v^* = v_B^* + v_B^*$，$v_A^* \in Av$，$v_B^* \in Bv$，由

$$
\begin{aligned}
\langle v^* - u^*, w - v\rangle &= \langle v_A^* + v_B^* - u_A^* - u_B^*, w - v\rangle \\
&= \langle v^* - u_A^*, w - v\rangle + \langle v_B^* - u_B^*, w - v\rangle \\
&\leqslant \langle v_B^* - u_B^*, w - v\rangle \leqslant \sup_{(v,v^*)\in G(B)} \langle v - u_B^*, w - v\rangle
\end{aligned}
$$

因为 B 是 3^*— 单调的，从而有

$$\sup_{(v,v^*)\in G(C)} \langle v^* - u^*, w - v\rangle < \infty$$

从而由定理知得(5)。 证毕。

定理 2 的证明

Ⅰ 设 K 是 3^*— 单调的

令 $A = F^{-1}$，$B = K$，则 A，B 均为极大单调映射，且 $R(A) = D(F) = X$，由 $D(B) = X^*$，知 $D(A) \subset X^* = D(B)$，由推论 1 知 $R(A + B) = R(A) + R(B) = X$，从而 $\forall\ b \in X$，$\exists\ v \in D(A) \subset D(B)$，使得 $b \in Av + Bv$，即 $b \in F^{-1}v + Kv$，于是 $b = u + u_1$，$u \in F^{-1}v$，$u_1 \in Kv$，从而 $v \in Fu$，$u_1 \in KFu$，故 $b \in u + kFu$，故 $X \subset R(I + KF)$，所以 $R(I + KF) = X$.

Ⅱ 设 F 是 3^*— 单调的

注意到

$$R(I + KF) = X \Leftrightarrow \forall\ b \in X, \exists\ u \in X$$

使得

$$b \in u + KFu \Leftrightarrow o \in u - b + KFu \Leftrightarrow b - u \in kFu \Leftrightarrow o \in Au + bu \quad u \in X \tag{6}$$

其中 $Au = -K^{-1}(b - u)$；$B = F$，由 K、F 极大单调知 A、B 也是极大单调的，且 $D(A) \subset X = D(B)$，由 $R(A) = D(K) = X$ 及推论 1 知 $R(A + B) = R(A) + R(B) = X$. 从而(6) 有解。

证毕

定理 3 的证明

由 $(H_1)'$ 知 $K: L_r(G) \to L_r(G)$ 线性、单调，且 $D(K) = L_r(G)$，从而 K 连续。故 A 极大单调。又由 (H_3) 知 $F: L_r(G) \to L_r(G)$ 单调连续，从而极大单调，且 $D(F) = L_r(G)$. 由[3] 命题 32.4 知 F 还是 3^*— 单调的，从而对 $X = L_r(G)$，$X^* = L_q(G)$ 用定理 2 得出结果。 证毕。

参 考 文 献

1 俞鑫泰．Banach 空间几何引论．上海：华东师范大学出版社，1986. 190～196

2 巴布 著，张石生 译．非线性半群与 Banach 空间中的微分方程．成都：四川大学出版社，1987. 1～100

3 Zeidler E. Nonlinear Functional Analysis and Its Application Ⅱ B. Springer-Verlag New York Inc. 1990. 817～911

4 张石生．积分方程．重庆：重庆出版社，1988. 1～400

5 郭大均．非线性泛函分析．济南：山东科学技术出版社，1985. 1～390