1996 年 11 月　　重庆大学学报　(自然科学版)　　Vol. 19, №. 6
第 19 卷第 6 期　　Journal of Chongqing University (Natural Science Edition)　　Nov. 1996

(23) 135-140

集值映射锐角原理在变分不等式中的应用*

The Application of Acute Angle Principle for Set-valued Map to Variational Inequalities

O176.3
O177.91

舒永录
Shu Yonglu
(重庆大学系统工程及应用数学系，重庆，630044；33 岁，男，讲师，硕士)

摘　要　利用集值映射锐角原理，在较弱的强制条件下，给出了实自反 Banach 空间中的几个抽象的变分不等式，推广了已有结果。

关键词　极大单调映射；变分不等式；锐角原理　　集值映射
中国图书资料分类法分类号　O177.91

ABSTRACT　The article estiblished several abstract variational inequalities in the real reflexive Banach space under weaker coercive conditions using acute angle principle for set-valued map.

KEYWORDS　maximal monotone mapping; variational inequality; acute angle princple

0　引　言

有限维空间中的锐角原理

定理 A[1]　设 $\Omega \subset R^n$ 有界开、$0 \in \Omega$，$f: \bar{\Omega} \to R^n$ 连续，若

$$(f(x), x) \geqslant 0 \qquad \forall x \in \partial\Omega \tag{1}$$

则 $f(x) = 0$ 在 $\bar{\Omega}$ 中有解。

条件(1)表示对每个 $x \in \partial\Omega$，向量 $f(x)$ 与 x 之间的夹角是锐角。

再将定理 A 推广到 Hilbert 空间

定理 B[2]　设 H 是 Hilbert 空间，$G \subset H$ 有界开，$O \in G$，$T: \bar{G} \to H$ 紧，若

$$(x - Tx, x) \geqslant 0 \qquad \forall x \in \partial G \tag{2}$$

则 T 在 $\bar{G}$ 中有不动点。

然后它又被推广到自反 Banach 空间中的单调映射

定理 C[1]　设 E 是自反 Banach 空间，$T: E \to E^*$ 单调，h-半连续，若存在 $r > 0$，$\Omega_r = \{x \in E: \|x\| < r\}$ 使得

$$\langle Tx, x \rangle \geqslant 0 \qquad \forall x \in \partial\Omega_r \tag{3}$$

则 $Tx = 0$ 在 $\bar{\Omega}_r$ 中有解。

由于 T 单调、h-半连续，它必是极大单调的。最近陈玉清[3]将定理 C 推广到一般的极大

* 收文日期　1996-03-05

单调映射的情形。

定理D[3] 设 E 是实自反 Banach 空间、$T:D(T)\subset E\to 2^{E^*}$ 是极大单调的，$\Omega\subset E$ 有界开，$0\leqslant\Omega\cap D(T)$，若

$$\langle f,x\rangle\geqslant 0\qquad\forall x\in\partial\Omega\cap D(T)\qquad f\in Tx\tag{4}$$

则 $0\in Tx$ 在 $\bar{\Omega}\cap D(T)$ 中有解。

定理C被称为单调算子的锐角原理，因此我们也不妨称定理D为集值映射的锐角原理。值得注意的是，(3)、(4) 虽无"夹角是锐角"的直观几何意义了，但它却与单调算子理论中常用的一个条件 —— 强制性条件有密切关系，它可视为一种弱的强制性条件。本文按这种思路来具体考虑自反 Banach 空间中的变分不等式问题，在相继的文章中，我们将考虑它们在椭圆变分不等式，发展型变分不等式以及控制问题中的应用。

1 主要结果

为在后面应用方便，先将定理D改写为

定理E 设 E 在实自反 Banach 空间，$T:D(T)\subset E\to 2^{E^*}$ 极大单调，存在 $\Omega\subset E$ 有界开，$u_0\in\Omega\cap D(T)$，$b\in E^*$ 使得

$$\langle u^*-b,u-u_0\rangle\geqslant 0\qquad\forall u\in\partial\Omega\cap D(T)\qquad u^*\in Tu$$

则 $b\in Tu$ 在 $\bar{\Omega}\cap D(T)$ 中有解。

证明 取 $T_1u=T(u+u_0)-b,\forall u\in D(T)-u_0,\Omega_1=\Omega-u_0$，则 $T:D(T_1)\subset E\to 2^{E^*}$ 极大单调，且 $0\in\Omega_1\cap D(T_1)$，而由 $\forall u\in\partial\Omega_1\cap D(T_1),u^*\in T_1u$ 得 $u+u_0\in\partial\Omega\cap D(T),u^*+b\in T(u+u_0)$，从而 $\langle u^*,u\rangle=\langle(u^*+b)-b,(u+u_0)-u_0\rangle\geqslant 0$，由定理 D 知存在 $u_1\in\bar{\Omega}_1\cap D(T_1)$，使得 $0\in T_1u_1$，由 T_1 定义得 $0\in T(u_1+u_0)-b$，即 $b\in T(u_1+u_0)$，定理证毕。

笔者还将用到下面的

引理1[4] 设 X 是实自反 Banach 空间，$A,B:X\to 2^{X^*}$ 极大单调，且 $D(A)\cap\mathrm{int}D(B)\neq\varnothing$，则 $A+B:X\to 2^{X^*}$ 也是极大单调的。

现叙述并证明主要结果。

定理1 设 X 是实自反 Banach 空间，如果

(H_1) $A:X\to 2^{X^*}$ 单调

(H_2) $\varphi:X\to(-\infty,+\infty]$ 凸下半连续，$\varphi\not\equiv+\infty$

(H_3) 下列三条之一成立

1) $A:X\to X^*$ 单值，h- 半连续

2) A 极大单调且 $\mathrm{int}D(A)\cap D(\partial\varphi)\neq\varnothing$

3) A 极大单调且 $D(A)\cap\mathrm{int}D(\partial\varphi)\neq\varnothing$

(H_4) 存在 $\Omega\subset X$ 有界开，$u_0\in\Omega\cap D(A+\partial\varphi)$ 使得

$$\langle u^*,u-u_0\rangle\geqslant 0\qquad\forall u\in\partial\Omega\cap D(A+\partial\varphi)\qquad u^*\in(A+\partial\varphi)(u)$$

则存在 $u\in\bar{\Omega}\cap D(A+\partial\varphi)$，$u^*\in Au$ 使得

$$\langle u^*,v-u\rangle\geqslant\varphi(u)-\varphi(v)\qquad\forall v\in X$$

证明 由 (H_3) 及引理1知 $A+\partial\varphi:X\to 2^{X^*}$ 极大单调，由 (H_4) 及定理 E 知存在 $u\in\bar{\Omega}\cap D(A+\partial\varphi)$ 使得 $0\in(A+\partial\varphi)(u)$，从而存在 $u^*\in Au$，$-u^*\in\partial\varphi(u)$，由次微分的定义得

$$\langle -u^*, v-u\rangle \leqslant \varphi(v)-\varphi(u) \quad \forall v\in X$$

即 $\langle u^*, v-u\rangle \geqslant \varphi(u)-\varphi(v) \quad \forall v\in X$ 　证毕

定理 1 推广了[4]中命题 32.36。

推论 1　设 X 是实自反 Banach 空间，$A: X\to 2^{X^*}$ 极大单调，$b\in X^*$，若存在 $\Omega\subset x$ 有界开，$u_0\in\Omega\cap D(A)$ 使得

$$\langle u^*-b, u-u_0\rangle \geqslant 0 \quad \forall u\in\partial\Omega\cap D(A) \quad u^*\in Au$$

则存在 $u\in D(A)\cap\bar{\Omega}$ 使得 $b\in Au$

证明　取 $\varphi(u)\equiv 0, \forall u\in X$ 则 $D(\varphi)=X$ 且 φ 凸下半连续，$\partial\varphi(u)\equiv 0, \forall u\in X$，取 $A_1u=Au-b$，则 $D(A_1)=D(A)$，且 $A_1: D(A_1)\subset X\to 2^{X^*}$ 极大单调。对 A_1,φ 用定理 1 知存在 $u\in D(A_1)\cap\bar{\Omega}, u^*\in A_1u$，使得 $\langle u^*, v-u\rangle\geqslant 0 \quad \forall v\in X$，从而 $u^*=0$，故 $0\in Au-b$，即 $b\in Au$. 　证毕

推论 1 部分地推广了[4]中推论 32.27. 为叙述进一步的结果，先给出下面的例子。

例 1[4]　设 X 为实 Banach 空间，$C\subset X$ 非空闭凸集，其指示函数(indicator function)χ_C 定义为

$$\chi_C(u)=\begin{cases}0 & u\in C\\ +\infty & u\in X\backslash C\end{cases}$$

则 $\chi_C: X\to(-\infty,+\infty]$ 凸下半连续，从而 $\partial\chi_C: X\to 2^{X^*}$ 极大单调且 $D(\partial\chi_C)=C$.

推论 2　设 X 为实自反 Banach 空间，$A: X\to 2^{X^*}$ 是极大单调映射，$C\subset X$ 是非空闭凸集，$b\in X^*$，若存在 $\Omega\subset X$ 有界开，$u_0\in\Omega\cap D(A)\cap C$ 使得

$$\langle u^*-b, u-u_0\rangle\geqslant 0 \quad \forall u\in\partial\Omega\cap D(A)\cap C \quad u^*\in(A+\partial\chi_C)(u)$$

则存在 $u\in\bar{\Omega}\cap D(A)\cap C, u^*\in Au$ 使得 $\langle u^*-b, v-u\rangle\geqslant 0 \quad \forall v\in C$

证明　取 $A_1u=Au-b$，χ_C 为 C 的指示函数，对 A_1 及 χ_C 用定理 1 知存在 $u\in\bar{\Omega}\cap D(A)\cap C, u^*\in A_1u$ 使得 $\langle u^*, v-u\rangle\geqslant\chi_C(u)-\chi_C(v) \quad \forall v\in X$

从而由 χ_C 的定义知 $\langle u^*, v-u\rangle\geqslant 0 \quad \forall v\in C$

又由 $u^*\in A_1u=Au-b$ 知存在 $u_1^*\in Au$，使得 $u^*=u_1^*-b$，于是得

$$\langle u_1^*-b, v-u\rangle\geqslant 0 \quad \forall v\in C$$

证毕

推论 3　在推论 1 中取 $b=0$ 就得定理 C 之推广。

推论 4　设 X 为实自反 Banach 空间，$\varphi: X\to(-\infty,+\infty]$ 凸下半连续，$\varphi\not\equiv+\infty$，若存在 $\Omega\subset X$ 有界开，$u_0\in\Omega\cap D(\partial\varphi)$ 使得 $\langle u^*, u-u_0\rangle\geqslant 0 \quad \forall u\in\partial\Omega\cap D(\partial\varphi) \quad u^*\in\partial\varphi(u)$

则存在 $u\in\bar{\Omega}\cap D(\partial\varphi)$ 使得 $\varphi(u)=\operatorname{int}_X\varphi(v)$

证明　取 $Au\equiv 0, \forall u\in X$，则 $A: D(A)=X\to X^*$ 极大单调，对 A 及 φ 用定理 1 得结果。

证毕

定理 2　设 X 是实自反 Banach 空间，如果

H_1)　$L: D(L)\subseteq X\to X^*$ 极大单调

H_2)　$A: X\to 2^{X^*}$ 单调

H_3)　$\varphi: X\to(-\infty,+\infty]$ 凸下半连续，$\varphi\not\equiv+\infty$

H_4)　下列 3 条之一满足

1) $A: X\to X^*$ 单值，h-半连续

2）A 极大单调且 $\mathrm{int}D(A)\cap D(\partial\varphi)\neq\varnothing$

3）A 极大单调且 $D(A)\cap\mathrm{int}D(\partial\varphi)\neq\varnothing$

H_5）　$D(L)\cap\mathrm{int}D(A+\partial\varphi)\neq\varnothing$

H_6）　存在 $\Omega\subset X$ 有界开，$u_0\in\Omega\cap D(A+L+\partial\varphi)$ 使得

$$\langle u^*,u-u_0\rangle\geqslant 0\qquad\forall u\in\partial\Omega\cap D(A+L+\partial\varphi)\qquad u^*\in(A+L+\partial\varphi)(u)$$

则存在 $u\in\bar{\Omega}\cap D(A+L+\partial\varphi)$，$u^*\in Au$ 使得

$$\langle Lu+u^*,v-u\rangle\geqslant\varphi(u)-\varphi(v)\qquad\forall v\in X$$

证明　由（H_4）及引理 1 知 $A+\partial\varphi:X\to 2^{X^*}$ 极大单调，再用引理 1 及（H_5）知 $A+L+\partial\varphi:X\to 2^{X^*}$ 极大单调由（H_6）及定理 E 知存在 $u\in\bar{\Omega}\cap(A+L+\partial\varphi)$ 使得 $0\in(A+L+\partial\varphi)(u)$. 从而存在 $u^*\in Au$，使得 $-(Lu+u^*)\in\partial\varphi(u)$，由次微分的定义得

$$\langle-(Lu+u^*),v-u\rangle\leqslant\varphi(v)-\varphi(u)\qquad\forall v\in X$$

从而

$$\langle Lu+u^*,v-u\rangle\leqslant\varphi(u)-\varphi(v)\qquad\forall v\in X$$

证毕

定理 2 推广了[4]中定理 32. J.

推论 5　设 X 是实自反 Banach 空间，$A:X\to 2^{X^*}$ 极大单调，$L:D(L)\subseteq X\to X^*$ 极大单调，且 $D(L)\cap\mathrm{int}D(A)\neq\varnothing$，$b\in X^*$，若存在 $\Omega\subset X$ 有界开，$u_0\in\Omega\cap D(A+L)$ 使得

$$\langle u^*-b,u-u_0\rangle\geqslant 0\qquad\forall u\in\partial\Omega\cap D(A+L)\qquad u^*\in(L+A)(u)$$

则存在 $u\in D(A)\cap D(L)\cap\bar{\Omega}$，使得 $b\in Lu+Au$

证明　取 $\varphi(u)\equiv 0,\forall u\in X$，则 φ 凸下半连续，且 $\partial\varphi(u)\equiv 0,\forall u\in X$，$A_1u=Au-b$，则 $D(A_1)=D(A)$，且 $A_1:D(A_1)\subset X\to 2^{X^*}$ 极大单调，对 L,A_1,φ 用定理 2 知存在 $u\in\bar{\Omega}\cap D(A+L)$，$u^*\in A_1u$ 使得

$$\langle Lu+u^*,v-u\rangle\geqslant 0\qquad\forall v\in X$$

从而 $Lu+u^*=0$，由 $u^*\in A_1u=Au-b$ 知存在 $u_1^*\in Au$，使得 $u^*=u_1^*-b$，从而 $Lu+u_1^*-b=0$，所以 $b\in Lu+Au$.　　证毕

推论 6　取 X,A,L 如推论 5，$C\subset X$ 非空闭凸集，$b\in X^*$，若存在 $\Omega\subset X$ 有界开，$u_0\in\Omega\cap D(A+L)\cap C$，使得

$$\langle u^*-b,u-u_0\rangle\geqslant 0\qquad\forall u\in\partial\Omega\cap D(A+L)\cap C\qquad u^*\in(A+L+\partial\chi_C)(u)$$

则存在 $u\in\bar{\Omega}\cap D(A+L)\cap C$，$u^*\in Au$ 使得

$$\langle Lu+u^*-b,v-u\rangle\geqslant 0\qquad\forall v\in C$$

证明　取 $A_1u=Au-b$，对 A_1、χ_C 及 L 用定理 2 知存在 $u\in\bar{\Omega}\cap D(A+L)\cap C$，$u^*\in A_1u$ 使得

$$\langle Lu+u^*,v-u\rangle\geqslant\chi_C(u)-\chi_C(v)\qquad\forall v\in X$$

由 $u^*\in A_1u=Au-b$ 知存在 $u_1^*\in Au$ 使得 $u^*=u_1^*-b$，从而

$$\langle Lu+u^*-b,v-u\rangle\geqslant 0\qquad\forall v\in C$$

证毕

2　推　　广

上一节在全空间 X 上建立了主要结果，为使其有更广的适应性，本节将其推广到 X 的非空闭凸集 C 中去。

引理 2[4]　设 X 是实自反 Banach 空间，$C\subset X$ 非空间凸集，若 $A:C\to 2^{X^*}$ 极大单调

$$\overline{A}x=\begin{cases}Ax & x\in C\\ \varnothing & x\in x/C\end{cases}$$

则 $\overline{A}:X\to 2^{X^*}$ 也极大单调。

注意到次微分是对 X 上的函数 $f:X\to(-\infty,+\infty]$ 定义的，引入

定义 1　若 X 是 Banach 空间，$C\subset X$ 非空闭凸集，$\varphi:C\to(-\infty,+\infty]$，将 φ 延拓到 X 上。

$$\overline{\varphi}(x)=\begin{cases}\varphi(x) & x\in C\\ +\infty & x\in x/C\end{cases}$$

对 $\forall\, x\in C$，φ 在 x 的次微分定义为 $\overline{\varphi}$ 在 x 点的次微分，即 $\partial\varphi(x)=\partial\overline{\varphi}(x)$，因此

$$\forall\, x\in C\quad x^*\in\partial\varphi(x)\Leftrightarrow\langle x^*,y-x\rangle\leqslant\overline{\varphi}(y)-\overline{\varphi}(x)\qquad\forall\, y\in X$$

$$\Leftrightarrow\langle x^*,y-x\rangle\leqslant\overline{\varphi}(y)-\overline{\varphi}(x)\qquad\forall\, y\in C$$

引理 3　设 X 是实自反 Banach 空间，$C\subset X$ 非空闭凸集，$\varphi:C\to(-\infty,+\infty]$ 凸下半连续，$\varphi\not\equiv+\infty$，则 $\partial\varphi:C\to 2^{X^*}$ 是极大单调的。

证明　由定义 $\overline{\varphi}:X\to(-\infty,+\infty]$ 也凸下半连续，且 $\overline{\varphi}\not\equiv+\infty$，从而 $\partial\overline{\varphi}:X\to 2^{X^*}$ 极大单调，从而其图象 $G(\partial\overline{\varphi})=\{(u,u^*)\in X\times X^*;u^*\in\partial\overline{\varphi}(u)\}$ 是 $X\times X^*$ 中的极大单调集，注意到 $D(\partial\overline{\varphi})=D(\partial\varphi)\subset C$，从而 $G(\partial\varphi)=G(\partial\overline{\varphi})$ 是 $C\times X^*$ 中的极大单调集，从而 $\partial\varphi:C\to 2^{X^*}$ 极大单调。　　证毕

定理 3　设 X 为实自反 Banach 空间，$C\subset X$ 非空闭凸集，且 $\mathrm{int}C\neq\varnothing$.

H_1)　$A:C\to 2^{X^*}$ 单调

H_2)　$\varphi:C\to(-\infty,+\infty]$ 凸下半连续，$\varphi\not\equiv+\infty$

H_3)　下列二条之一满足

1) A 极大单调，$\mathrm{int}D(A)\cap D(\partial\varphi)\neq\varnothing$

3) A 极大单调，$D(A)\cap\mathrm{int}D(\partial\varphi)\neq\varnothing$

H_4)　C 有界时

则存在 $u\in C$，$u^*\in Au$，使得

$$\langle u^*,v-u\rangle\geqslant\varphi(u)-\varphi(v)\qquad\forall\, v\in C$$

若(H_5)　C 无界时，存在 $\Omega\subset X$ 有界开，$u_0\in\Omega\cap D(A+\partial\varphi)$，使得

$$\langle u^*,u-u^*\rangle\geqslant 0,\qquad\forall\, u\in\partial\Omega\cap D(A)\cap D(\partial\varphi)\qquad u^*\in(A+\partial\varphi)(u)$$

则存在

$$u\in\overline{\Omega}\cap D(A+\partial\varphi),\qquad u^*\in Au$$

使得

$$\langle u^*,v-u\rangle\geqslant\varphi(u)-\varphi(v)\qquad\forall\, v\in C$$

证明　由引理 2 知 $\overline{A}:X\to 2^{X^*}$ 极大单调，且 $D(A)=D(\overline{A})$，由(H_3)及引理 1 知 $\overline{A}+\partial\varphi:X\to 2^{X^*}$ 极大单调，由引理 3 的证明知 $A+\partial\varphi:C\to 2^{X^*}$ 是极大单调的。

若 C 有界。则由[4]中推论 32.27 知 $0\in(A+\partial\varphi)(u)$ 在 C 中有解，即存在 $u\in C$，$u^*\in Au$，$-u^*\in\partial\varphi(u)$，从而由定义 1 得

$$\langle -u^*,v-u\rangle\leqslant\varphi(v)-\varphi(u)\qquad\forall\, v\in C$$

即

$$\langle u^*,v-u\rangle\geqslant\varphi(u)-\varphi(v)\qquad\forall\, v\in C$$

若 C 无界，由 (H_5)，对 $\overline{A}$ 及 $\overline{\varphi}$ 利用定理 1 知存在 $u \in \Omega \cap D(\overline{A}) \cap D(\partial\overline{\varphi})$，$u^* \in \overline{A}u$，使得

$$\langle u^*, v - u \rangle \geqslant \varphi(u) - \varphi(v) \qquad \forall v \in X$$

由 $\overline{A}$ 及 $\overline{\varphi}$ 的定义知此即

$$\langle u^*, v - u \rangle \geqslant \varphi(u) - \varphi(v) \qquad \forall v \in C$$

证毕

定理 4 设 X 为实自反 Banach 空间，$C \subset X$ 闭凸且 $\mathrm{int}C \neq \varnothing$.

H_1) $L: D(L) \subsetneqq C \to X^*$ 极大单调

H_2) $\varphi: C \to (-\infty, +\infty]$ 凸下半连续，$\varphi \not\equiv +\infty$

H_3) $A: C \to 2^{X^*}$ 极大单调且 $\mathrm{int}D(A) \cap D(\partial\varphi) \neq \varnothing$ 或 $\mathrm{int}D(\partial\varphi) \cap D(A) \neq \varnothing$

H_4) $D(L) \cap \mathrm{int}D(A + \partial\varphi) \neq \varnothing$

若 (H_5) C 有界

则存在 $u \in C$，$u^* \in Au$ 使得

$$\langle Lv + u^*, v - u \rangle \geqslant \varphi(u) - \varphi(v) \qquad \forall v \in C$$

若 (H_6) C 无界时，存在 $\Omega \subset X$ 有界开，$u_0 \in \Omega \cap D(A + L + \partial\varphi)$ 使得

$$\langle u^*, u - u_0 \rangle \geqslant 0 \qquad \forall u \in \partial\Omega \cap D(A + L + \partial\varphi) \qquad u^* \in (A + L + \partial\varphi)(u)$$

则存在 $u \in \overline{\Omega} \cap D(A + L + \partial\varphi)$，$u^* \in Au$ 使得

$$\langle Lu + u^*, v - u \rangle \geqslant \varphi(u) - \varphi(v) \qquad \forall v \in X$$

证明 视 $Lu = \{Lu\}$，$\forall u \in D(L) \subsetneqq C$，从而 $L: C \to 2^{X^*}$ 极大单调，故 $\overline{L}: X \to 2^{X^*}$ 也极大单调(引理 2)，从而由 (H_3) 及引理 1 知 $\overline{A} + \partial\overline{\varphi}: X \to 2^{X^*}$ 极大单调，再由 (H_4) 及引理 1 知 $\overline{L} + \overline{A} + \partial\overline{\varphi}: X \to 2^{X^*}$ 极大单调。注意到 $D(\overline{L} + \overline{A} + \partial\overline{\varphi}) \subset C$ 及引理 3 的证明知 $L + A + \partial\varphi: C \to 2^{X^*}$ 极大单调。

若 C 有界，由[4]推论 32.27 知存在 $u \in C$，使得 $0 \in (A + L + \partial\varphi)u$，即存在 $u^* \in Au$，$-(Lu + u^*) + \partial\varphi(u)$.

从而

$$\langle Lu + u^*, v - u \rangle \geqslant \varphi(u) - \varphi(v) \qquad \forall v \in C$$

若 C 无界，由 (H_6)，对 $\overline{L}, \overline{A}, \overline{\varphi}$ 利用定理 2 知存在 $u \in \overline{\Omega} \cap D(\overline{L} + \overline{A} + \partial\overline{\varphi})$，$u^* \in \overline{A}u$ 使得

$$\langle \overline{L}u + u^*, v - u \rangle \geqslant \varphi(u) - \varphi(v) \qquad \forall v \in X$$

由 $\overline{L}, \overline{A}$ 及 $\overline{\varphi}$ 的定义知这等价于

$$\langle Lu + u^*, v - u \rangle \geqslant \varphi(u) - \varphi(v) \qquad \forall v \in C$$

证毕

参考文献

1 郭大均．非线性泛函分析．济南：山东科学技术出版社，1985. 117～365

2 Zeidler E. Nonlinear functional analysis and its applications I. Springer-verlag New-York Inc. 1986. 556

3 陈玉清．极大单调映象的零点定理．北京：数学学报，1995，38(6)，831～836

4 Zeidler E. Nonlinear function analysis and its applications Ⅱ B. New-York Springer-verlag; Inc. 1990. 817～911

5 Zeidler E. Nonlinear functional analysis and its applications Ⅱ A. New-York Springer-verlag; Inc. 1990. 314～384

6 巴布 著，方石生 译．非线性半群与 Banach 空间中的微分方程．成都：四川大学出版社，1987. 1～100

7 Zeidler E. Nonlinear functional analysis and its application Ⅱ. New-York Springer-verlag; Inc, 1985. 551～580