

②
7-13

实施一维 Mallat 算法的几个问题

Some Problems about the Implementation of One-dimensional Mallat Algorithm

TH115

| | | | |
|-----------|------------|-------------|--------------|
| 徐铭陶 | 秦树人 | 陈志奎 | 杨昌祺 |
| Xu Mintao | Qin Shuren | Chen Zhikui | Yang Changqi |

(重庆大学测试中心, 重庆, 630044, 第一作者 62 岁, 男, 教授)

A 摘要 详细地研究了 m 阶尺度函数, 特别是 $D_{m,0}^{(m)}(t)$ 和信号的采样, 零阶保持逼近。导出了信号初始近谱的计算方法。对信号的一维 Mallat 算法的实施作了系统的讨论。

关键词 一维 Mallat 算法; 尺度函数; 信号; 采样; 零阶保持逼近; 初始逼近谱
中国图书资料分类法分类号 TH115

ABSTRACT The sampling method for scale function $\varphi(t)$, specially $D_{m,0}^{(m)}(t)$ and signal are studied in detail. With the help of zero order holding approximations of the scale function and signal, the preliminary approximation spectrum of the signal are derived. Then, the implementation of one dimensional Mallat algorithm is introduced systematically.

KEYWORDS one dimensional Mallat algorithm; scale function; signal; sampling; zero order holding approximation; preliminary approximation spectrum

1 m 阶尺度函数的采样和零阶保持逼近

设 $\varphi(t)$ 是函数空间 $L^2(R)$ 的规范正交母尺度函数。由 $\varphi(t)$ 生成的 m 阶尺度函数则是

$$\varphi_{m,n}(t) = 2^{-m/2}\varphi(2^{-m}t - n) = 2^{-m/2}\varphi[2^{-m}(t - 2^n n)]; \quad n \in Z \quad (1)$$

式中 m 叫尺度参数, 是无量纲的整数。 t 表示时间, 不妨约定其量纲为 $[s]$, n 为整平移参数, 量纲也为 $[s]$ 。

为了适应数值计算的需要, 常设 $\varphi_{m,n}(t)$ 只取值于 α 轴的有限区间 $[2^n n - T_m^*/2, 2^n n + T_m^*/2]$ 上, 并称 T_m^* 为 $\varphi_{m,n}(t)$ 的有效长度, $2^n n$ 为 $\varphi_{m,n}(t)$ 的中心坐标。 T_m^* 的取值有人为性。要求计算精度高时, T_m^* 的值应取大些。好的母尺度函数 T_m^* 取得小些也能保证必要的计算精度。不失一般性可将 T_m^* 表示为

$$T_m^* = r \cdot 2^n \quad [s] \quad (2)$$

* 收文日期 1996-04-25
国家自然科学基金资助项目

显示出与 m 有关, 式中 r 为一适当选取的自然数。

$\varphi_{m..}(t)$ 有切频, 记为 f_r^* , 可表示为

$$f_r^* = \frac{\alpha}{2} \cdot 2^{-n} \quad (3)$$

也显示出与 m 有关, 式中 α 也为一适当选取的自然数。当 r 取大值时, 则 α 可取得小些。

在数值计算中需对 $\varphi_{m..}(t)$ 进行采样, 可取采样间隔为

$$\Delta_r^* = 2^n / \alpha (= 1/2f_r^*) \quad [s] \quad (4)$$

并将采样点坐标取为

$$t = 2^{n\alpha} + \beta \Delta_r^* \quad [s] \quad (5)$$

$$\beta = 0, \pm 1, \dots, \pm N_r, N_r = [T_r^*/2\Delta_r^*] + 1$$

这里 $[r_r^*/2\Delta_r^*]$ 为 $T_r^*/2\Delta_r^*$ 的取整, 注意到 $2^{n\alpha} = \alpha n \Delta_r^*$, 于是采样点坐标又可表示为

$$t = (\alpha n + \beta) \Delta_r^*, \quad \beta = 0, \pm 1, \dots, \pm N_r$$

至此可写出 $\varphi_{m..}(t)$ 的采样值序列为

$$\begin{aligned} \varphi_{m..}(2^{n\alpha} + \beta \Delta_r^*) &= \varphi_{m..}[(\alpha n + \beta) \Delta_r^*] \\ \beta &= 0, \pm 1, \dots, \pm N_r \end{aligned} \quad (6)$$

引入无量纲时间

$$\tau = t / \Delta_r^* \quad (7)$$

对 $\varphi(t), \varphi_{m..}(t), \varphi_{m..}(2^{n\alpha} + \beta \Delta_r^*)$ 可改记为

$$\begin{aligned} \varphi'(\tau) &\triangleq \varphi(\Delta_r^* \tau) = \varphi(t) \\ \varphi_{m..}'(\tau) &= \varphi_{m..}(\Delta_r^* \tau) = \varphi_{m..}(t) \\ \varphi_{m..}'(\alpha n + \beta) &= \varphi_{m..}[(\alpha n + \beta) \Delta_r^*] \end{aligned} \quad (8)$$

取 Haar 函数

$$p(\tau) = \begin{cases} 1 & \tau \in [0, 1) \\ 0 & \text{其余} \end{cases} \quad (9)$$

作插值函数, 则由 $\varphi_{m..}'(\alpha n + \beta)$ 可造出 $\varphi_{m..}(t)$ 的零阶保持逼近式

$$\varphi_{m..}(t) = \varphi_{m..}'(\tau) \approx \tilde{\varphi}_{m..}(\tau) = \sum \varphi_{m..}'(\alpha n + \beta) p(\tau - \alpha n - \beta) \quad (10)$$

2 Daubeches 尺度函数的采样

Daubeches 母尺度函数记为 $D^{(N)}(t)$, 由于具有有限支集, 特别适合于在信号分析中运用。

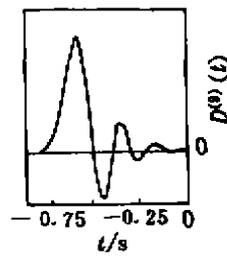
$D^{(N)}(t)$ 是由有限长度尺度序数 $\{h^{(N)}(n)\}$ 构成的双尺度差分方程的解^[1], 通常是用数值方法求出, 没有严格的解析表达式, 而是用数表或曲线的形式给出^[2]。

作为例子, 附表示出 $\{h^{(9)}(n)\}$ 的数表, 而附图则示出 $D^{(9)}(t)$ 以及 $(\sqrt{2\pi})|\hat{D}^{(9)}(\omega)|$ 的图象。这里的 $\hat{D}^{(9)}(\omega)$ 为 $D^{(9)}(t)$ 的付氏变换, 可从 $D^{(9)}(t)$ 的 FFT 得出。

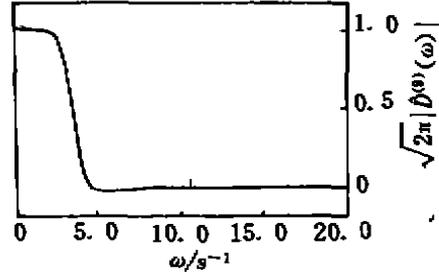
采用母尺度函数 $D^{(N)}(t)$ 做信号的小波分析需从 $D^{(N)}(t)$ 求出 $D_{m..}^{(N)}(t)$ 的采样值。这里的 $D_{m..}^{(N)}(t)$ 是将 $D^{(N)}(t)$ 进行 m 次伸缩和平移 n 的变换得出的 m 阶尺度函数。

附表 $h^{(n)}(\pi)$ 的数值

| n | $h^{(n)}(\pi)$ | n | $h^{(n)}(\pi)$ |
|-----|-----------------|-----|-----------------|
| 0 | 0.038077947354 | 9 | -0.067632829061 |
| 1 | 0.243834674613 | 10 | 0.000250947115 |
| 2 | 0.604823123690 | 11 | 0.022361662124 |
| 3 | 0.657288078051 | 12 | -0.004723204758 |
| 4 | 0.133197385825 | 13 | -0.004281503682 |
| 5 | -0.293273783279 | 14 | 0.001847646883 |
| 6 | -0.096840783223 | 15 | 0.000230385764 |
| 7 | 0.148540749338 | 16 | -0.000251963189 |
| 8 | 0.030725681479 | 17 | 0.000039347320 |



(a) $D^{(n)}(t)$ 的图象



(b) $\sqrt{2\pi}|D^{(n)}(\omega)|$ 的图象

附图 $D^{(n)}(t)$ 和 $\sqrt{2\pi}|D^{(n)}(\omega)|$ 的图像

对于任意母尺度函数 $\varphi(t)$, 有

$$\begin{aligned} \varphi_{m..}(2^n n + \beta \Delta_r) &= 2^{-n/2} \varphi \left[2^{-n} \left(2^n n + \beta \frac{2^n}{a} \right) - n \right] \\ &= 2^{-n/2} \varphi \left(\frac{\beta}{a} \right) \end{aligned} \tag{11}$$

作为上式的特例, 立刻可得 $D_{m..}^{(n)}(t)$ 与 $D^{(n)}(t)$ 两者采样值的关系:

$$D_{m..}^{(n)}(2^n n + \beta \Delta_r) = D^{(n)} \left(\frac{\beta}{a} \right) \tag{12}$$

还需说明(12)式中参数 a 和 β 的选取. 考虑 $m = 0$ 情况. 由(4)和(2)可得

$$a = [2f_r^0] + 1; \quad r = [T_r^0] + 1 \tag{13}$$

式中的 f_r^0, T_r^0 分别是 $\varphi(t) \equiv \varphi_{0..}(t)$ 的切频和有效长度. 将(13)回代入(4)和(2)则有

$$\Delta_r^0 = \frac{2^n}{[2f_r^0] + 1}; \quad T_r^0 = 2^n ([T_r^0] + 1) \tag{14}$$

将(14)代入(5)中 N_r 的表达式, 则得

$$N_r = \left[\frac{1}{2} ([T_r^0] + 1) ([2f_r^0] + 1) \right] + 1 \tag{15}$$

从而 $\beta = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N_r$

已知除 $N = 2$ 之外, $D^{(n)}(t)$ 都不具有对称性, 为了减少计算时间, 可令 β 非对称地取值:

$$\beta = -N_r^-, -N_r^- + 1, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, N_r^+ \tag{16}$$

例如对于 $D^{(n)}(t)$, 参考附图可取 $f_r^0 = 15/2\pi = 2.4 \text{ Hz}, T_r^0 = 1 \text{ s}$, 于是, $a = 5 \text{ Hz}, r = 2 \text{ s}, N_r^- = 6, N_r^+ = 0$ (如取 $T_r^0 = 1 \text{ ms}$, 则 $f_r^0 = 15 \times 1000 \text{ Hz}$, 但 $N_r^- = 6, N_r^+ = 0$).

3 信号的采样和零阶保持逼近

考察有切频为 f_c 的带限信号

$$x(t) = \begin{cases} x(t), & t \in [0, T_c] \\ 0 & \text{其余} \end{cases} \quad (17)$$

这里 T_c 为信号记录长度, 设尺度参数 m 是这样选取的: 即设

$$\Delta_c^* = 2^m/a \leq \Delta_c = 1/2f_c$$

于是有

$$m \leq \log_2 \left(\frac{a}{2f_c} \right)$$

约定取

$$m = \left[\log_2 \left(\frac{a}{2f_c} \right) \right] + 1 \quad (18)$$

如此则可取 Δ_c^* 作 $x(t)$ 的采样间隔, 得出 $x(t)$ 的采样序列:

$$x(l\Delta_c^*), \quad l = 0, 1, \dots, N_c = [T_c/\Delta_c^*] + 1 \quad (19)$$

也引用(7)定义的无量纲时间 $\tau = 2/\Delta_c^*$, 则有

$$\begin{aligned} x'(\tau) &\triangleq x(\Delta_c^* \tau) = x(t) \\ x'(\tau) &= x(\Delta_c^* l) \end{aligned} \quad (20)$$

也取 Haar 函数(9)作插值函数, 则可造出 $x(t)$ 的零阶保持逼近

$$\begin{aligned} x(t) &= x'(\tau) = \tilde{x}'(\tau) = \sum_l x'(l) p(\tau - l) \\ &= \sum x(l\Delta_c^*) p(\tau - l) \end{aligned} \quad (21)$$

4 信号的初始逼近谱的算法

设 $x(t) \in V_m$, 这里

$$V_m = \text{span}\{\varphi_{m,n}(t), n \in Z\} \quad (22)$$

于是

$$x(t) = \sum_{n \in Z} C_{m,n} \varphi_{m,n}(t) \quad (23)$$

或

$$x'(t) = \sum_{n \in Z} C_{m,n} \varphi'_{m,n}(t)$$

式中

$$C_{m,n} = \langle x(t), \varphi_{m,n}(t) \rangle = \langle x'(\tau), \varphi'_{m,n}(\tau) \rangle \quad (24)$$

就是 $x(t)$ 的初始逼近谱(即 m 尺度逼近谱), 以 $\tilde{x}'(\tau), \tilde{\varphi}'_{m,n}(\tau)$ 代替(24)中的 $x'(\tau), \varphi'_{m,n}(\tau)$, 可得 $C_{m,n}$ 的离散计算公式:

$$C_{m,n} = \int_n \sum_l x'(l) p(\tau - l) \sum_p \varphi'_{m,n}(a\tau + \beta) p(\tau - a\tau - \beta) d\tau$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_l \sum_p x'(l) \varphi'_{m..}(an + \beta) \delta_{l, m+p} \\
&= \sum_p x'(an + \beta) \varphi'_{m..}(an + \beta) \\
&= \sum_p x[(an + \beta) \Delta_p^*] \varphi_{m..}[(an + \beta) \Delta_p^*] \quad (25)
\end{aligned}$$

可见 τ 和 $p(\tau)$ 的引入只起辅助推演的作用, 应用(25) 计算 $C_{m..}$ 时, 它们的影响消失了。

当中心坐标 an 满足

$$n < -N_p/a; \quad n > (N_r + N_p)/a \quad (26)$$

或

$$n < -\left(\left[\frac{a\tau}{2}\right] + 1\right) \frac{1}{a}; \quad n > \left(\left[\frac{aT_r}{2^m}\right] + \left[\frac{a\tau}{2}\right] + 2\right) \frac{1}{a} \quad (27)$$

对应的 $C_{m..} = 0$. 真正需计算的 $C_{m..}$, 其下标 n 应满足

$$-\frac{N_p}{a} \leq n \leq \frac{N_r + N_p}{a} \quad (28)$$

或

$$-\left(\left[\frac{a\tau}{2}\right] + 1\right) \frac{1}{a} \leq n \leq \left(\left[\frac{aT_r}{2^m}\right] + \left[\frac{a\tau}{2}\right] + 2\right) \frac{1}{a} \quad (29)$$

5 信号小波分解的 Mallat 公式^[3]

由于

$$x(t) \in V_m = V_{m+1} \oplus W_{m+1} \quad (30)$$

式中

$$W_{m+1} = \text{span}\{\psi_{m+1..}(t), n \in z\} \quad (31)$$

是 $m+1$ 尺度小波空间, 而 $\psi_{0..}(t) \equiv \psi(t)$ 为与 $\varphi(t)$ 对应的母小波函数, 将 $x(t)$ 放到 V_{m+1} 和 W_{m+1} 中考察, 就有

$$x(t) = x_{m+1..}^r(t) + x_{m+1..}^s(t) \quad (32)$$

式中

$$x_{m+1..}^r(t) = \sum_p C_{m+1..} \varphi_{m+1..}(t) \quad (33)$$

$$x_{m+1..}^s(t) = \sum_p W_{m+1..} \psi_{m+1..}(t) \quad (34)$$

而 $C_{m+1..}$ 与 $W_{m+1..}$ 分别是信号 $x(t)$ 的 $m+1$ 尺度逼近谱和小波谱, 并有

$$\begin{aligned}
C_{m+1..} &= \langle x_{m+1..}^r, \varphi_{m+1..} \rangle = \langle x - x_{m+1..}^s, \varphi_{m+1..} \rangle \\
&= \langle \sum_p C_{m..} \varphi_{m..}, \varphi_{m+1..} \rangle = \sum_p \langle \varphi_{m..}, \varphi_{m+1..} \rangle C_{m..} \quad (35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{m+1..} &= \langle x_{m+1..}^s, \psi_{m+1..} \rangle = \langle x - x_{m+1..}^r, \psi_{m+1..} \rangle \\
&= \langle \sum_p C_{m..} \varphi_{m..}, \psi_{m+1..} \rangle = \sum_p \langle \varphi_{m..}, \psi_{m+1..} \rangle C_{m..} \quad (36)
\end{aligned}$$

由于

$$\langle \varphi_{m..}, \varphi_{m+1..} \rangle = \int_p \frac{2^{-m}}{\sqrt{2}} \varphi(2^{-m}t - n) \overline{\varphi\left(\frac{2^{-m}}{\sqrt{2}}t - k\right)} dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_n \varphi(y-n) \bar{\varphi}\left(\frac{y}{2}-k\right) dy \quad (\text{这里 } y=2^{-n}t) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_n \varphi\left(\frac{z}{2}\right) \bar{\varphi}(z+2k-n) dz \quad (\text{这里 } z=y-2k) \\
 &= \bar{h}_{n-2k}
 \end{aligned} \tag{37}$$

类似的推演还可得

$$\langle \varphi_{m+1,n}, \varphi_{m+1,n} \rangle = \bar{g}_{n-2k} \tag{38}$$

式(37)和(38)中的 $\{h_k\}$ 和 $\{g_k\}$ 分别是对应于 $\varphi(t)$ 的尺度数列和小波数列。

将(37)和(38)分别代入(35)和(36)就得信号小波分解的 Mallat 公式:

$$C_{m+1,n} = \sum_k \bar{h}_{n-2k} C_{m,n}; \quad W_{m+1,n} = \sum_k \bar{g}_{n-2k} C_{m,n} \tag{39}$$

由于引入了 $\{h_k\}$ 和 $\{g_k\}$, 就使 $C_{m+1,n}$ 和 $W_{m+1,n}$ 的计算只依赖于 $C_{m,n}$ 而不再与 $x(t)$ 和 $\varphi_{m,n}(t)$ 的采样值发生直接的联系。

应用(39)时, 需确定下标 n 和 k 的取值范围。前面已说明 $C_{m,n} = \langle x(t), \varphi_{m,n}(t) \rangle$ 中 n 的取值范围为(29)式。仿此, (39)中 $C_{m+1,n} = \langle x(t), \varphi_{m+1,n}(t) \rangle$, 从而还有 \bar{h}_{n-2k} 的下标 k 的取值应满足:

$$-\left(\left[\frac{\alpha r}{2}\right]+1\right)\frac{1}{\alpha} \leq k \leq \left(\left[\frac{\alpha T_r}{2^{m+1}}\right]+\left[\frac{\alpha r}{2}\right]+2\right)\frac{1}{\alpha} \tag{40}$$

其次鉴于 $\{h_k\}$ 与 $\{g_k\}$ 有一一对应关系^[1]:

$$g_k = (-1)^{k-1} \bar{h}_{1-k} \tag{41}$$

因此(39)中 \bar{g}_{n-2k} , 从而还有 $W_{m+1,n}$ 的下标 k 的取值也应满足(40)。

(40)表明 k 取值区间长度为 $\left[\frac{T_r}{2^{m+1}}\right]+r+\frac{3}{\alpha}$, 而(29)表明 n 的取值区间为 $\left[\frac{T_r}{2^m}\right]+r+\frac{1}{\alpha}$ 。前者比后者缩减了 $\frac{1}{2}$ 。这意味着数组 $\{C_{m+1,n}\}, \{W_{m+1,n}\}$ 的元素比 $\{C_{m,n}\}$ 都少一半。

由于

$$V_{m+1} = V_{m+2} \oplus W_{m+2} \tag{42}$$

式中 W_{m+2} 为尺度 $m+2$ 的小波空间, 并有

$$W_{m+2} = \text{span}\{2^{-(m+2)/2} \psi[2^{-(m+2)}t-n], n \in Z\} \tag{43}$$

将 x_{m+1}^e 放到 V_{m+2} 和 W_{m+2} 中考察, 则有

$$x_{m+1}^e = x_{m+2}^e + x_{m+2}^e \tag{44}$$

$$x_{m+2}^e = \sum_n C_{m+2,n} \varphi_{m+2,n}(t) \tag{45}$$

$$x_{m+2}^e = \sum_n C_{m+2,n} \psi_{m+2,n}(t) \tag{46}$$

$$C_{m+2,n} = \sum_k \bar{h}_{n-2k} C_{m+1,n}; \quad W_{m+2,n} = \sum_k \bar{g}_{n-2k} C_{m+1,n} \tag{47}$$

逐步地仿此到第 $r+1$ 步可得

$$x_{m+r}^e = x_{m+r+1}^e + x_{m+r+1}^e \tag{48}$$

$$x_{m+r+1}^e = \sum_n C_{m+r+1,n} \varphi_{m+r+1,n}(t) \tag{49}$$

$$x_{m+r+1}^e = \sum_n W_{m+r+1,n} \psi_{m+r+1,n}(t) \tag{50}$$

$$C_{m+r+1,t} = \sum_i \tilde{h}_{i-2t} C_{m+r,t}; W_{m+r+1,t} = \sum_i \tilde{g}_{i-2t} C_{m+r,t} \quad (51)$$

所谓对信号作 $r+1$ 步小波分析就在于计算出诸 C_{m+i}, W_{m+i} 以及 $x_{m+i}^+(t), x_{m+i}^-(t), i=1, \dots, r+1$.

由于每做一步小波分析, 得出的逼近谱和小波谱数目都减少一半. 如设 $\{C_{m,i}\}$ 含 N 个元素, 例如设 $N=2^{10}$, 则 $r+1=10$ 时小波分析就终止了.

6 信号的重建

按(24)有

$$\langle x, \varphi_{m,i} \rangle = C_{m,i}$$

按(33)和(34)并引用(37)和(38)又有

$$\begin{aligned} \langle x_{m+1}^+, \varphi_{m,i} \rangle &= \sum_j \langle \varphi_{m+1,j}, \psi_{m,i} \rangle C_{m+1,j} \\ &= \sum_j \tilde{h}_{j-2i} C_{m+1,j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle x_{m+1}^-, \psi_{m,i} \rangle &= \sum_j \langle \psi_{m+1,j}, \varphi_{m,i} \rangle W_{m+1,j} \\ &= \sum_j \tilde{g}_{j-2i} W_{m+1,j} \end{aligned}$$

应用这些结果于(32)式与 $\varphi_{m,i}$ 的内积表达式, 可得

$$C_{m,i} = \sum_j \tilde{h}_{j-2i} C_{m+1,j} + \sum_j \tilde{g}_{j-2i} W_{m+1,j} \quad (52)$$

叫做 Mallat 反演公式, 也叫做信号的一步重建公式. 仿此可求出从 $r+1$ 步的逼近谱和小波谱 $C_{m+r+1,t}, W_{m+r+1,t}$ 可重建出 r 步的逼近谱

$$C_{m+r,t} = \sum_i \tilde{h}_{i-2t} C_{m+r+1,t} + \sum_i \tilde{g}_{i-2t} W_{m+r+1,t} \quad (53)$$

递推之, 可以从 $C_{m+r+1,t}$ 和 $W_{m+r+1,t}, \dots, W_{m+1,t}$ 重建信号的初始逼近谱 $C_{m,i}$. 如将此 $C_{m,i}$ 回代入(17)式, 则可重建信号 $x(t)$.

参 考 文 献

- 1 徐铭陶, 秦树人, 陈志奎等. $L^2(\mathbb{R})$ 的多尺度逼近与小波正交分解. 重庆大学学报, 1996, 19(2): 1~9
- 2 Daubechies I. Ten lectures on wavelets. Philadelphia, Capital city press, 1992. 129~166
- 3 Mallat S. A Theory for Multiresolution Signal Decomposition; The Wavelet Representation. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machina Intelligence, 1989, 11(7), 674~693