1997年5月 重庆大学学报 (自然科学版) Vol. 20, №. 3
第20卷第3期 Journal of Chongqing University (Natural Science Edition) May. 1997

(10)

52-55

图的超-边连通性*

Super Edge-Connectivities of Graphs

O157.5

何中市 杨晓帆
He Zhongshi Yang Xiaofan
(重庆大学系统工程及应用数学系,重庆,630044;第一作者31岁,男,副教授,博士)

摘 要 刻划了无环无向图的超-边连通性(边连通性)与顶点最小度的关系。得到了边连通性、超-边连通性的充分条件,并构造了非超-边连通的图,由此表明定理1和定理2条件中的界是不能被改进的。

关键词 图连通性;充分条件;网络可靠性 / 超-边连通性
中国图书资料分类法分类号 O157.5; TP302

ABSTRACT The relation between the super edge-connectivities (edge-connectivities) of graphs and the minimum degrees of vertices of graphs is characterized in this paper. The sufficient conditions for edge-connectivities and super edge-connectivities are proposed, it is shown that the bounds in these conditions of theorem 1 and theorem 2 can not be improved in general by constructing graphs with non super edge-connectivities.

KEYWORDS connectivity of graph; sufficient condition; network reliability / super edge-connectivities

0 引 言

图的超-边连通性在网络可靠性分析与设计中均具有重要的应用,因为网络的可靠性综合中的一些公开问题在一定条件下可以化为寻求具有超-边连通性的图[1,2]。

本文讨论无环无向图。对图 G 引用如下记号:用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示 G 的顶点集和边集,$d_G(v)$ 表示 G 中顶点 v 的度,$\nu(G)$ 和 $\delta(G)$ 分别表示 G 的顶点数和顶点最小度,$\mu(G)$ 表示图 G 的最大重复度,简称 G 的重复度,并简记为 μ,$\lambda(G)$ 表示 G 的边连通度;并用 $(S,T)_G$ 表示将 $V(G)$ 划分为两个(不相交的)非空子集 S 和 T,$m_G(S,T)$ 表示 G 中跨接顶点子集 S 和 T 的边数。文中用到的其它记号见[3]。

关于图的超-边连通性,有如下定义:

定义 $A^{[1\sim2]}$ 如果对于图 G 的每一个最小边割集 E' (含 $\lambda(G)$ 条边),有 $G-E'$ 含有一个孤立点,则称图 G 是超-边连通的。简记为超-λ 的。

显然,图 G 是超-λ 的蕴涵 $\lambda(G)=\delta(G)$,但其逆不真。

---

* 收文日期 1996-06-21
国家自然科学基金资助项目,资助号:69573040

对一类特殊的图 —— 循环图 $C_n(a_1,\cdots,a_k)$ 的超-边连通性有如下结果：

引理 A[4~6]　在所有连通的循环图中，除 $C_n(a)$ 和 $C_{2k}(2,4,\cdots,k-1,k)$（其中 k 为奇数）外，都是超-λ 的。

本文证明了：只要 $\delta(G) \geqslant \mu\left[\frac{v(G)}{2}\right]$，则 $\lambda(G)=\delta(G)$ 成立；当 $v(G)\leqslant 3$ 时，G 是超-λ 的，当 $v(G)\geqslant 4$ 时，只要 $\delta(G) > \mu\left[\frac{v(G)}{2}\right]$，则 G 是超-λ 的。并通过构图的方式表明了这些命题中关于 $\delta(G)$ 的界是不能被改进的。

1　图的边连通性

关于图的边连通度，有 $\lambda(G)\leqslant\delta(G)$. 并且易于证明如下引理成立：

引理 1　$\lambda(G)\geqslant k$ 当且仅当对于任意的 $(S,T)_G$，有 $m_G(S,T)\geqslant k$.

若 G 为简单图，则有

引理 B[7]　设 G 为简单图，若 $\delta(G)\geqslant\left[\frac{v(G)}{2}\right]$，则 $\lambda(G)=\delta(G)$.

对于无环无向图 G，本文得到如下定理：

定理 1　若 $\delta(G)\geqslant\mu\left[\frac{v(G)}{2}\right]$，则 $\lambda(G)=\delta(G)$.

证　由于 $\lambda(G)\leqslant\delta(G)$，故只需证明 $\lambda(G)\geqslant\delta(G)$. 由引理 1，需证对于任意的 $(S,T)_G$，有 $m_G(S,T)\geqslant\delta(G)$.

事实上，$|S|\geqslant 1$，$|T|\geqslant 1$. 不失一般性，可设 $|S|\leqslant\left[\frac{v(G)}{2}\right]$，对于 S 中的任何顶点 v，由于 $\mu(G)=\mu$，故 G 中与顶点 v 相关联的且另一关联顶点在 T 中的边数至少有 $\delta(G)-\mu(|S|-1)$. 因此

$$\begin{aligned} m_G(S,T) &\geqslant (\delta(G)-(|S|-1))\cdot|S| \\ &=\delta(G)+(|S|-1)(\delta(G)-\mu|S|) \end{aligned}$$

结合已知与 $1\leqslant|S|\leqslant\left[\frac{v(G)}{2}\right]$ 可得

$$\delta(G)-\mu|S|\geqslant\mu\left[\frac{v(G)}{2}\right]-\mu\left[\frac{v(G)}{2}\right]=0,\ |S|-1\geqslant 0$$

故 $m_G(S,T)\geqslant\delta(G)$，从而得证 $\lambda(G)=\delta(G)$.　　证毕

显然，引理 B 为定理 1 的一种特殊情况，即当 G 为简单图（$\mu=1$）的这种特例，所以定理 1 推广了引理 B.

2　图的超-边连通性

首先由定义 A 及引理 1 即刻得到如下结论

引理 2　若 $v(G)\leqslant 3$，则

1) $\lambda(G)=\delta(G)$;

2) G 是超-λ 的。

下面不妨设 $v(G)\geqslant 4$. 关于图的超-边连通性,我们提出如下充要条件

引理 3 G 是超-λ 的当且仅当对于任意的 $(S,T)_G$: $|S|\geqslant 2,|T|\geqslant 2$, 有 $m_G(S,T)>\delta(G)$.

证 1) "充分性":设 F 为 G 的任意一个最小边割集。则 $|F|=\lambda(G)$、且 $G-F$ 含有两个连通分图 G_1 和 G_2、可知 G_1 或 G_2 必为孤立点。

否则:令 $S=V(G_1)$, $T=V(G_2)$, 则 $(S,T)_G$ 满足 $|S|\geqslant 2$、$|T|\geqslant 2$, 从而 $|F|\geqslant m_G(S,T)>\delta(G)\geqslant\lambda(G)$, 即 $|F|>\lambda(G)$, 矛盾。

故 $G-F$ 含有一个孤立点,从而 G 是超-λ 的。

2) "必要性"。用反证法。

假设存在 $(S,T)_G$: $|S|\geqslant 2$, $|T|\geqslant 2$, 有 $m_G(S,T)\leqslant\delta(G)$. 则令 F 为 G 中跨接 S 和 T 的边集,则 $G-F$ 不连通,且 $|F|=m_G(S,T)\leqslant\delta(G)$. 又因 G 是超-λ 的,故 $\lambda(G)=\delta(G)$, 从而 $|F|=\delta(G)$. 即 F 为 G 的最小边割集,可知 $G-F$ 含有两个连通分图,且这两个连通分图的顶点数(分别为 $|S|$ 和 $|T|$)都大于 1. 从而 $G-F$ 不含孤立点,与 G 为超-λ 的矛盾。

综上、引理得证。 证毕

由此可得

定理 2 若 $\delta(G)>\mu\left[\frac{v(G)}{2}\right]$, 则 G 为超-λ 的。

证 由定理 1 知 $\lambda(G)=\delta(G)$ 成立。结合引理 2, 只需证明:对任意的 $(S,T)_G$: $|S|\geqslant 2$, $|T|\geqslant 2$, 有 $m_G(S,T)>\delta(G)$.

事实上:可设 $|S|\leqslant\left[\frac{v(G)}{2}\right]$. 则

$$\begin{aligned}m_G(S,T)&\geqslant(\delta(G)-\mu(|S|-1))|S|\\&=\delta(G)+(|S|-1)(\delta(G)-\mu|S|)\end{aligned}$$

注意到 $2\leqslant|S|\leqslant\left[\frac{v(G)}{2}\right]$, 由已知可得

$$\delta(G)-\mu|S|>\mu\left[\frac{v(G)}{2}\right]-\mu\left[\frac{v(G)}{2}\right]=0,\ |S|-1>0$$

即 $m_G(S,T)>\delta(G)$. 从而得证 G 是超-λ 的。 证毕

由此即可得到推论 1.

推论 1 设 G 为简单图,若 $\delta(G)>\left[\frac{v(G)}{2}\right]$, 则 G 是超-λ 的。

3 构 图

下面用构图的方式阐明定理 1 和定理 2 条件中关于 $\delta(G)$ 的界在一般情况下是不能被改

进的。

3.1　$\lambda(G)<\delta(G)$ 的图的构造

当 $v(G)\leqslant 3$ 时，由引理 2 知 $\lambda(G)=\delta(G)$ 成立；当 $v(G)\geqslant 4$ 时：由定理 1 知，若 $\delta(G)\geqslant\mu\left[\frac{v(G)}{2}\right]$，则 $\lambda(G)=\delta(G)$ 成立，若 $\delta<\mu\left[\frac{v(G)}{2}\right]$，则 $\lambda(G)=\delta(G)$ 不一定成立。下面构造这样的图。

对于任意的正整数 $n\geqslant 4,\mu\geqslant 1$. 构造图 G_1 使 $v(G_1)=n,\mu(G_1)=\mu;\delta(G_1)=\mu\left[\frac{v(G)}{2}\right]-1$，而 $\lambda(G_1)<\delta(G_1)$. 记 $p=\left[\frac{n}{2}\right]\geqslant 2,q=n-p\geqslant p$. 则

G_1：　$V(G_1)=\{u_1,\cdots,u_p,v_1,\cdots,v_q\}$

$E(G_1)=E(K_1)\cup E(K_2)\cup\{(\mu-1)\{u_i,v_i\},i=1,\cdots,p\}$

其中 K_1 和 K_2 分别表示顶点集为 $\{u_1,\cdots,u_p\}$ 和 $\{v_1,\cdots,v_q\}$ 的 μ 重完全图(即每条边的重复度都是 μ，每一对顶点都相邻)，$(\mu-1)\{u_i,v_i\}$ 表示边 $\{u_i,v_i\}$ 的重复度为 $(\mu-1)$.

可知 $v(G_1)=p+q=n,\mu(G_1)=\mu$.

$$\delta(G_1)=\mu(p-1)+(\mu-1)=\mu p-1=\mu\left[\frac{v(G)}{2}\right]-1$$

而

$$\lambda(G_1)\leqslant(\mu-1)p=\mu p-p<\mu p-1=\delta(G_1)$$

(因为 $F=\{(\mu-1)\{u_i,v_i\},i=1,\cdots,p\}$ 为 G_1 的一个边割集)

从而得到

定理 3　对任意的正整数 $n\geqslant 4,\mu\geqslant 1$，都存在图 $G=G_1$，使 $v(G)=n,\mu(G)=\mu,\delta(G)=\mu\left[\frac{v(G)}{2}\right]-1$，而 $\lambda(G)<\delta(G)$.

3.2　非超-边连通图的构造

对图 G，由引理 2 和定理 2 可知，当 $v(G)\leqslant 3$ 或 $\delta(G)>\mu\left[\frac{v(G)}{2}\right]$ 时，G 是超-边连通的；若 $\delta\leqslant\mu\left[\frac{v(G)}{2}\right]$ 且 $v(G)\geqslant 4$，则 G 不一定是超-边连通的。

下面对于任意的正整数 $n\geqslant 4,\mu\geqslant 1$，构造图 G_2 使 $v(G_2)=n,\mu(G_2)=\mu,\delta(G_2)=\mu\left[\frac{v(G_2)}{2}\right]$，而 G 不是超-边连通的。

记 $p=\left[\frac{n}{2}\right]\geqslant 2,q=n-p\geqslant p,K_1$、$K_2$ 同前，则

G_2：　$V(G_2)=\{u_1,\cdots,u_p,v_1,\cdots,v_q\}$

$E(G_2)=E(K_1)\cup E(K_2)\cup\{\mu\{u_i,v_i\},i=1,\cdots,p\}$

可知　$v(G_2)=n,\mu(G_2)=\mu$

$$\delta(G_2)=\mu(p-1)+\mu=\mu p=\mu\left[\frac{v(G_2)}{2}\right]$$

由定理 1 知 $\lambda(G_2)=\delta(G_2)$ 成立。

设 $F=\{\mu\{u_i,v_i\},i=1,\cdots,p\}$，则 $|F|=\mu p=\delta(G_2)=\lambda(G_2)$，且 F 为 G_2 的最小边割集，但 $G-F=K_1\cup K_2$ 不含有孤立点，从而 G 不是超-λ 的。

综上得到

定理4 对于任意的正整数 $n \geq 4, \mu \geq 1$，都存在图 $G = G_2$，使 $v(G) = n, \mu(G) = \mu, \delta(G) = \mu\left[\frac{v(G)}{2}\right]$，而 G 不是超-λ 的。

4 结 语

本文细致地刻画了图的边连通性、超-边连通性与顶点最小度的关系，得到以下主要结果：

1）当 $v(G) \leqslant 3$ 时，有 $\lambda(G) = \delta(G)$，且 G 是超-λ 的。

2）若 $\delta(G) \geqslant \mu\left[\frac{v(G)}{2}\right]$，则 $\lambda(G) = \delta(G)$.

3）对于任意的正整数 $n \geqslant 4, \mu \geqslant 1$，构造了图 G_1，使 $\delta(G_1) = \mu\left[\frac{v(G_1)}{2}\right] - 1$，而 $\lambda(G_1) < \delta(G_1)$.

4）若 $\delta(G) > \mu\left[\frac{v(G)}{2}\right]$，则 G 是超-λ 的。

5）对于任意的正整数 $n \geqslant 4, \mu \geqslant 1$，构造了图 G_2，使 $\delta(G_2) = \mu\left[\frac{v(G_2)}{2}\right]$，而 G_2 不是超-λ 的。

6）基于3），定理1条件中关于 $\delta(G_1)$ 的界在一般情况下是不能被改进的。

7）基于5），定理2条件中关于 $\delta(G)$ 的界在一般情况下也是不能被改进的。

参 考 文 献

1 Boesch F T. Synthesis of reliable networks—a survey. IEEE Trans. Reliability, 1986, 35(3): 240～246

2 Wang J F. an investigation of the network reliability properties of circulant graphs. Doctoral dissertation, Stevens Institute of Technology, 1983. 1～32

3 Berge C. Graphs and hypergraphs. Amsterdamn, North-Holland, 1976, 3～10

4 Boesch F T. Super line-connectivity properties of circulant graphs. SIAM J. Algebraic and Discrete Methods, 1986, 7(1): 89～98

5 Boesch F T. Circulants and their connectivities. J. Graph Theory, 1984, 8(5): 487～499

6 Chartrand G. The theory and application of graphs. Wiley, 1981. 45～54

7 F哈拉里著. 图论. 李慰萱译. 上海:上海科学技术出版社, 1982. 51～56

8 何中市. 拟正则图的最大线图连通度及其应用. 重庆大学学报, 1995, 18(2): 21～26