

⑤ 31-36

# 空间曲杆有限元分析

## Finite Element Analysis of Spatially curved Rods

熊汉伟  
Xiong Hanwei

张培源  
Zhang Peiyuan

TB121

(重庆大学工程力学系, 重庆, 630044, 第一作者 28 岁, 男, 博士生)

**摘要** 在自然曲线坐标系给出了空间曲杆的控制方程, 求得其静定问题解析通解, 以此为基础构造曲杆元广义位移模式, 得到了一种收敛的、精度高的曲杆单元。

**关键词** 曲杆; 解析解; 有限元法

中国图书资料分类法分类号 TB12

空间曲杆 静定问题

**ABSTRACT** A system of governing equations for spatially curved rods are derived in natural coordinate, and an analytic solution to the statically determinate problem is given. Based on the solution, a generalized displacement model for element of curved bars is developed, which is convergent and accurate.

**KEYWORDS** curved bars; analytic solution; finite element method

### 0 引言

空间曲杆在现代工程中有着广泛的应用, 但相应的有限元分析方法却不够完善, “以直代曲”是目前常用的手段<sup>[1~3]</sup>。在对空间曲杆进行有限元离散时, 为保证足够的计算精度, “以直代曲”的方案必须取较多的单元数目。而且由于曲杆几何形状的复杂性, 常规的多项式插值位移模式不能描述曲杆的刚体运动<sup>[4,6]</sup>。文献[6]、[7]仅对几种特殊几何形状的曲杆构造了完备的位移模式。

笔者首先在空间自然曲线坐标系下建立了空间曲杆的控制方程, 得到了静定问题解的解析表达式, 以此表达式为基础构造的曲杆元广义位移模式可描述曲杆的刚体运动, 所发展的有限元法具有收敛快、精度高的特点, 具有一定的实用意义。

### 1 基本方程

#### 1.1 几何方程

如图 1 所示,  $O_{mn}$  为空间固定的直角坐标系, 空间曲杆轴线的几何方程为:

$$R(s) = x(s)i_x + y(s)i_y + z(s)i_z \quad (1)$$

对轴线上任一点  $R(s)$ , 可得到一组正交的流动标架  $\{R(s); e_s, e_t, e_n\}$ 。杆截面上任一点的位矢

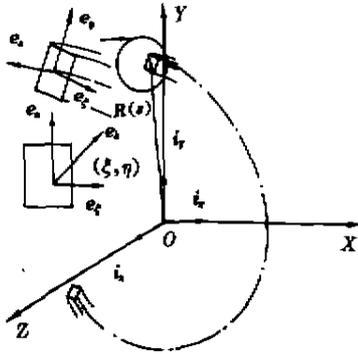


图1 空间曲杆及有关坐标系

为:

$$R' = R(s) + \xi e_1 + \eta e_2 \quad (2)$$

再在截面上引入极坐标系  $(b, \theta)$ , 则有:

$$R' = R(s) + b e_3 \quad (3)$$

类似圆截面直杆变形的平截面假设, 空间曲杆非轴线上点的位移可设为:

$$u' = u(s) + (-\xi \psi_1 - \eta \psi_2) e_3 + b \varphi e_3 \quad (4)$$

式中,  $u(s)$  为轴线位移,  $-\psi_1, \psi_2, \varphi$  分别为截面绕  $e_1, e_2$  和  $e_3$  的转角。由[8]和[9], 截面上

变形分布可表示为:

$$\begin{aligned} e_1 &= e + \varepsilon K_1 + \eta K_2 \\ \gamma_1 &= \gamma_1 - \eta K_3, \quad \gamma_2 = \gamma_2 + \xi K_3 \end{aligned} \quad (5)$$

这里引入了6个广义应变, 与广义位移间关系为:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \dot{u}_1 - \kappa u_2 \\ \gamma_1 &= -\dot{\psi}_1 + \dot{u}_2 - \tau u_1 + \kappa u_2 \\ \gamma_2 &= -\dot{\psi}_2 + \dot{u}_1 + \tau u_2 \\ K_1 &= -\dot{\psi}_1 + \tau(\dot{u}_1 + \tau u_2) \\ K_2 &= -\dot{\psi}_2 - \tau(\dot{u}_2 - \tau u_1 + \kappa u_2) + \kappa \varphi \\ K_3 &= \dot{\varphi} + \kappa \psi_1 \end{aligned} \quad (6)$$

其中,  $\kappa, \tau$  为轴线的曲率、挠率,  $(\dot{\quad}) = \frac{d(\quad)}{ds}$ 。式(6)就是空间曲杆的几何方程。

## 1.2 平衡方程

定义杆截面上内力素如下:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} T \\ Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} &= \iint_A \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \tau_{12} \\ \tau_{21} \end{Bmatrix} d\xi d\eta, \quad \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \iint_A \begin{Bmatrix} \xi \tau_{12} - \eta \tau_{21} \\ \eta \sigma_{11} \\ -\xi \sigma_{11} \end{Bmatrix} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (7)$$

式中  $A$  为截面域。由杆上微元段平衡条件, 不难列出平衡方程如下<sup>[8]</sup>:

$$\begin{aligned} \dot{T} - \kappa Q_1 + P_1 &= 0 \\ \dot{Q}_1 + \kappa T - \tau Q_2 + P_2 &= 0 \\ \dot{Q}_2 + \tau Q_1 + P_3 &= 0 \\ \dot{M}_1 - \kappa M_2 + m_1 &= 0 \\ \dot{M}_2 + \kappa M_1 - \tau M_3 - Q_2 + m_2 &= 0 \\ \dot{M}_3 + \tau M_2 + Q_1 + m_3 &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

### 1.3 等效本构方程

对 Hooke 介质曲杆, 可导出如下等效本构方程<sup>[8]</sup>:

$$\begin{aligned} T &= EA_s \varepsilon, & M_s &= GJK_s \\ Q_\zeta &= GA_s \gamma_\zeta, & M_\zeta &= EI_s K_\zeta \\ Q_\eta &= GA_s \gamma_\eta, & M_\eta &= -EI_s K_\eta \end{aligned} \quad (9)$$

式中,  $I_\zeta, I_\eta$  为截面对轴  $\eta$  和轴  $\zeta$  的惯性矩,  $J$  为截面的抗扭模数,  $A_s$  为截面积,  $E, G$  分别为杨氏模量和剪切模量。

## 2 通 解

上述的控制方程可写成矩阵形式:

平衡方程

$$[T]' - [\tau][T] + [P] = [0] \quad (10)$$

$$[M]' - [\tau][M] - [H][T] + [m] = [0]$$

几何方程

$$[\varphi]' - [\tau][\varphi] = [K] + \tau[H^*][\varepsilon] \quad (11)$$

$$[u]' - [\tau][u] - [H][\varphi] = [e]$$

等效本构方程

$$[T] = [B][\varepsilon], \quad [M] = [D][K] \quad (12)$$

式中各矩阵内容不难对照前面诸式写出。

现引入一  $3 \times 3$  矩阵  $[A]$ :

$$[A] = [a_{ij}], \quad a_{ij} = e_i \cdot i_j \quad (13)$$

可以证明  $[A]$  满足以下方程:

$$[A]' = [\tau][A]$$

由此可写出位移通解<sup>[8]</sup>:

$$[\varphi] = [A][\varphi_0] + [A] \int_0^s [A]^T [K^*] ds$$

$$[u] = [A] \{ [u_0] + [\Omega_0] ([X] - [X_0]) + \int_0^s ([A]^T [\varepsilon] - [\Omega^*] ([X] - [X_0])) ds \} \quad (14)$$

其中  $[\varphi_0], [u_0]$  是积分常量,  $[X]$  是杆轴线上点的位矢,  $[K^*] = [K] + [\tau][H^*][\varepsilon]$ ,  $[\Omega_0]$  是与  $[\varphi_0]$  对应的对偶反对称阵:

$$[\varphi_0] = \begin{bmatrix} \varphi_{10} \\ \varphi_{20} \\ \varphi_{30} \end{bmatrix}, \quad [\Omega_0] = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_{30} & \varphi_{20} \\ \varphi_{30} & 0 & -\varphi_{10} \\ -\varphi_{20} & \varphi_{10} & 0 \end{bmatrix}$$

$[\Omega^*]$  是与  $[\varphi^*] = \int_0^s [A]^T [K^*] ds$  对应的对偶反对称矩阵, 同样可得到内力素的通解。

### 3 有限元法

对曲杆单元采用常规的多项式插值位移模式难以描述单元的刚体位移,文献[4~7]均未妥当解决这一难题。问题的关键是要找一个包含单元刚体位移项的插值函数。我们注意到在通解式(14)中,若令应变 $[\varepsilon]$ 、 $[K]$ 为零,则余下的部分正是曲杆的刚体位移,因而可在 $(s_i, s_{i+1})$ 段上取广义位移插值函数为以下形式:

$$\begin{aligned}
 [\varphi] &= [A][\varphi_0] + [A] \int_{s_i}^{s_{i+1}} [A]^T [K^*] ds \\
 [u] &= [A] \{ [u_0] + [\varphi_0] ([X] - [X_0]) + \int_{s_i}^{s_{i+1}} ([A]^T [\varepsilon] - [\varphi^*] ([X] - [X_0])) ds \}
 \end{aligned} \tag{15}$$

在这里将 $[\varepsilon]$ 、 $[K]$ 当作常量,即取的是常应变单元。将 $s = s_i, s = s_{i+1}$ 的广义位移值代入式(15),则可求出4个待定系数 $[\varphi_0]$ 、 $[u_0]$ 、 $[K]$ 和 $[\varepsilon]$ :

$$\begin{aligned}
 [u_0] &= [A_i]^T [u_i] \\
 [\varphi_0] &= [A_{i+1}]^T [u_{i+1}] \\
 \begin{bmatrix} \varepsilon \\ K \end{bmatrix} &= [L] \begin{bmatrix} u_i \\ \varphi_i \\ u_{i+1} \\ \varphi_{i+1} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{16}$$

其中 $[L]$ 是一 $6 \times 12$ 矩阵,其中各元素值详见[8]。

将式(16)代入式(15),则可得以节点位移表示的单元广义位移模式:

$$\begin{bmatrix} u \\ \varphi \end{bmatrix} = [N] \begin{bmatrix} u_i \\ \varphi_i \\ u_{i+1} \\ \varphi_{i+1} \end{bmatrix} \tag{17}$$

这里, $[N]$ 是一 $6 \times 12$ 变量矩阵,是这种位移模式的形函数。

单元 $(s_i, s_{i+1})$ 上势能为

$$\begin{aligned}
 H &= \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{1}{2} [\varepsilon]^T [B] [\varepsilon] ds + \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{1}{2} [K]^T [D] [K] ds - \int_{s_i}^{s_{i+1}} [u]^T [P] ds \\
 &\quad - \int_{s_i}^{s_{i+1}} [\varphi]^T [m] ds - [u]^T [P] \Big|_{s_i}^{s_{i+1}} - [\varphi]^T [\bar{m}] \Big|_{s_i}^{s_{i+1}}
 \end{aligned} \tag{18}$$

取变分,  $\delta\Pi = 0$ , 可得

$$l_i [L]^T \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} [L] \begin{bmatrix} u_i \\ \varphi_i \\ u_{i+1} \\ \varphi_{i+1} \end{bmatrix} = \int_{s_i}^{s_{i+1}} [N]^T \begin{bmatrix} p \\ m \end{bmatrix} ds - \left. \begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{m} \end{bmatrix} \right|_{s_i}^{s_{i+1}} \quad (19)$$

其中  $l_i = s_{i+1} - s_i$ .

令  $[K]_i = l_i [L]^T \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} [L]$ , 此即为单元刚度矩阵。

式(19)右端记作  $[R]_i$ , 此即为等效节点载荷。单元平衡方程可写为:

$$[K]_i [u]_i = [R]_i \quad (20)$$

由于上述各量都是在曲线自然坐标系下定义的, 不需进行局部坐标向整体坐标的转换, 而直接由单元平衡方程组集得到整体平衡方程。

### 4 算 例

依照上述公式编写的相应的计算程序, 可对任意形状的曲杆进行有限元分析。采用本文的曲杆元和一般的直杆元分别对空间螺旋杆进行计算, 并与解析解进行比较, 结果如图 3~6 所示。

由图 3、4 可看到, 在求杆端位移时, 采用曲杆单元仅需将杆离散成 4 段或 8 段, 就可得到误差较小的解, 而直杆元法却需取 20 个左右单元。在计算中还发现, 虽然计算曲杆元的单元刚度阵花费时间较多, 但总的计算时间却较少。这是因为曲杆元法用于求解整体平衡方程的计算量远小于直杆元法。

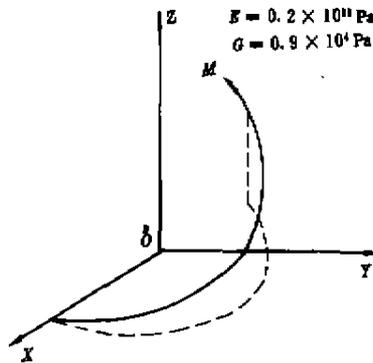


图 2 空间螺旋杆

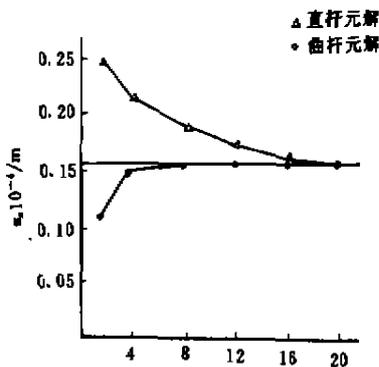


图 3 杆端位移  $u_x$  与杆单元数  $n$  的关系

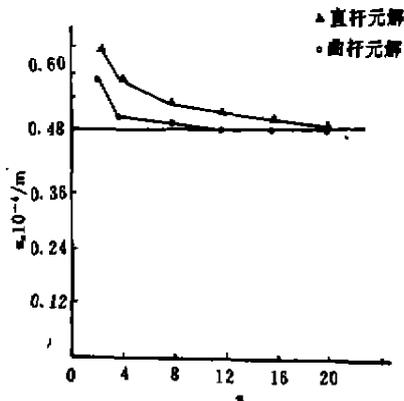


图 4 杆端位移  $u_z$  与杆单元数  $n$  的关系

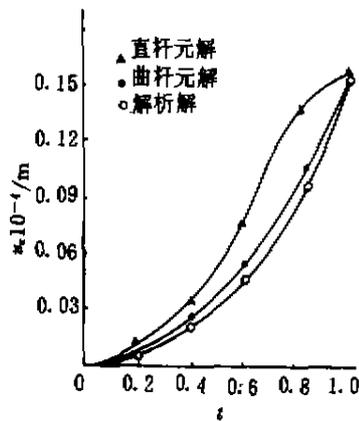


图5 位移分量  $u$  沿轴线的分布  
 $t$ ——轴线上点的无量纲坐标

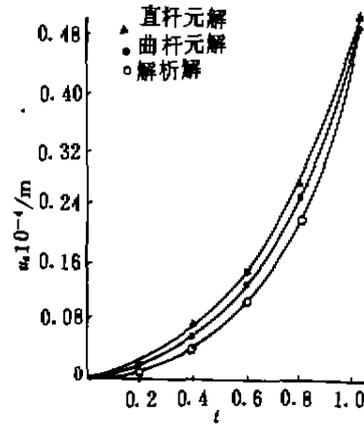


图6 位移分量  $u$  沿轴线的分布  
 $t$ ——轴线上点的无量纲坐标

图5、6是3种解法所得的位移图。其中曲杆元法采用的是5单元划分,直杆元法采用20单元划分。从图中可清晰看出:曲杆元法虽然取的单元数目少,但求得的结果却较精确。

## 5 结 语

对空间曲杆线性化的控制方程(6)、(8)、(9),可求得静定问题通解(14)。由此通解构造曲杆元广义位移模式,这样发展的有限元分析法,保证了解的收敛性,在精度和效率上双双得到显著提高。

## 参 考 文 献

- 1 刘延强,吕英民. 井壁变形和摩擦力对底部钻具组合的影响. 石油大学学报, 1991, 15(3): 32~40
- 2 张学鸿,刘巨保. 水平钻井柱接触问题的间隙元法. 计算结构力学及其应用, 1992, 9(4): 405~410
- 3 龚伟安. 钻井力学基础. 北京:石油出版社, 1982. 1
- 4 Tabbarok B, Farshad M, Yi H. Finite element formulation of spatially curved and twisted rods. Comput Method Appl Mech Engrg, 1988, 70(1): 275~299
- 5 Morris D L. Curved Beam stiffness coefficients. ASCE J Structural Div, 1968, 94(4): 1165~1174
- 6 Banan M R, Karami G. Finite element analysis of curved beams on elastic foundation. Computer and Structure, 1989, 32(1): 45~53
- 7 Farshad M, Karami G. Spatial buckling of arches—a finite element analysis. Int J computer structure, 1990, 34(3): 565~576
- 8 熊汉伟. 空间小挠曲杆理论及其有限元法:[学位论文]. 重庆:重庆大学工程力学系, 1996
- 9 匡震邦. 非线性连续介质力学基础. 西安:西安交通大学出版社, 1989. 34~40