

⑧39-44

不完全扇形投影数据的图象重建算法研究^{*}

Image Reconstruction from Incomplete Fan-Beam Projection
Data by Maximum Entropy and Iterative Technique

吕红^① 李时光^② 徐问之^① 闫旭^③ 吕怡^③
Lu Hong Li Shiguang Xu Wenzhi Yan Xu Lu Yi

TP391.5

(① 重庆大学 ICT 研究中心, 重庆, 400044; ② 北京计算机学院软件系;
③ 北京轻工业学院管理系; 第一作者 28 岁, 女, 硕士)

摘要 针对 CT 实际应用中存在不完全扇形束投影数据的图象重建问题, 提出了最大熵积分递推算法, 应用该算法对多种数据丢失情况进行了实验研究, 并与卷积反投影法进行了对比。

关键词 图象 / 图象重建; 最大熵; 积分递推; 扇形束投影, CT, 投影数据
中国图书资料分类法分类号 TP391.4

ABSTRACT In this paper, a new image reconstruction algorithm named maximum entropy and iterative technique is developed for incomplete fan-beam projection data. Applying the algorithm to research experimentally the cases of missing many kinds of data show that the quality of image by the new algorithm is much better than the convolution inverse projection technique.

KEYWORDS image / image reconstruction; maximum entropy; integral recursion; fan-beam

0 引 言

在 CT 的实际应用中, 投影图象重建会遇到数据不完全情况, 有出于经济上的考虑, 也有出于无法检测或很难检测到完全的投影数据。针对这种情况构成了不完全投影数据图象重建这类算法, 而最大熵法是当今研究的热点。

最大熵成象是用熵函数(泛函)取极大值为准则从观测数据重建图象。该算法以信息论与统计理论为基础, 融合了信息产生机制及信号相关性的先验知识。70 年代末, S. J. Wernecke 及 Minerbo. G 将最大熵用于图象重建^[1,2]。国内于 80 年代末开始这方面的研究, 采用平行束数据采集方式, 重建的是小尺寸图象^[3]。并都在中小型计算机(如 VAX 系列)上实现。

由于扇形束投影是实用的数据采集结构, 并考虑到在 CT 系统中采用通用微机具有重要意义, 因此, 在不完全扇形束投影数据条件下如何能获得比其它方法更好的图象质量, 且能在通用微机上实现, 显然具有实际意义。本文所提出的最大熵积分递推法较好地解决了这

* 收文日期 1996-09-16

** 现在第三军医大学西南医院设备科工作

个问题。

1 扇形束最大熵积分递推算法

1.1 扇形束数据采集结构

数据采集采用扇形射线束,大扇束角。射线源位于以源心点为圆心、半径为 R 的圆周上,产生连续分布的扇形射线束。如图 1。其中 β_j 决定了辐射源在第 j 个分度角的工作位置, δ_{jm} 决定了第 j 个分度角上的第 m 条射线, δ_{\max} 是以中心射线为基准的射线最大偏转角。一条由 (δ_{jm}, β_j) 确定的射线 l 也是由 (OB, θ_j) 确定的射线, OB 是原点 O 至该射线的距离, θ_j 是 OB 与 X 轴的夹角。有关系: $OB = R \sin \delta_{jm}$; $\theta_j = \delta_{jm} + \beta_j$; $R = OA = OA'$; $AB^2 = OA^2 - OB^2 = BA'^2$ 。

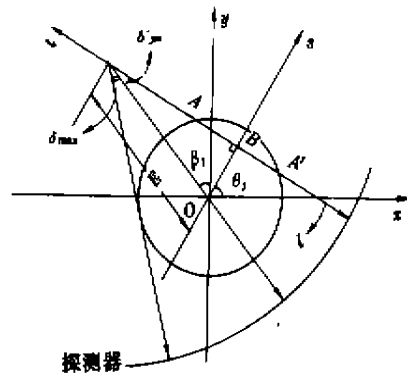


图 1 扇形束数据采集结构

为了定位扇形束射线,可先将 (δ_{jm}, β_j) 确定的射线视为 $s-t$ 坐标系下的射线,其中 $s-t$ 坐标系是 $x-y$ 坐标系旋转 θ_j 形成的,再由已知的 BA' , AB 作坐标变换求出 $x-y$ 坐标系下 A, A' 的交点坐标。

1.2 最大熵积分递推法

设待重建图象 $f(x, y)$ 是实函数,定义在闭区域 D 并连续可积,且作概率密度函数处理。引入投影坐标 $s-t$, 则其投影用下式表示:

$$\begin{aligned} P_{jm} &= \int_l f(x, y) dt \\ &= \int_l f[S_m \cos \theta_j, -t \sin \theta_j, (S_m \sin \theta_j, + t \cos \theta_j)] dt \\ &= \iint_D f(x, y) \delta(S_m - z \cos \theta_j, -y \sin \theta_j) dz dy \end{aligned} \quad (1)$$

$$m = 1, 2, \dots, M(j); j = 1, 2, \dots, N,$$

式中 N , 是等分 360° 的投影视角数(分度数); $\theta_j = \beta_j + \delta_{jm}$; β_j 表示第 j 个分度角; δ_{jm} 表示在第 j 个分度角中的第 m 条射线; $M(j)$ 是第 j 个分度可以覆盖整个图象的射线数。其中:

$$\beta_j = 2(j-1)\pi/N, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

$$\delta_{jm} = (m-1) \sin^{-1}(R/E)/M(j) = (m-1)\delta_{\max}/M(j) \quad m = 1, 2, \dots, M(j) \quad (3)$$

$$S_m = R \sin \delta_{jm} \quad (4)$$

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

在归一化条件下, 图象的熵:

$$H(f) = - \iint_D f(x, y) \cdot \ln f(x, y) dx dy \quad (5)$$

问题转化为求满足(1)式的约束方程, 并使(5)式中 H 最大的函数 f . 利用拉格朗日乘数法作泛函, 形成目标函数:

$$\begin{aligned} \psi(f, \lambda) = & - \iint_D f(x, y) \cdot \ln f(x, y) dx dy - \sum_{j=1}^{N_p} \sum_{m=1}^{M(j)} \lambda_{jm} [P_{jm} - \\ & \iint_D f(x, y) \delta(x \cos \theta_j + y \sin \theta_j - E \sin \delta_{jm}) dx dy] \end{aligned} \quad (6)$$

令 $\partial \psi / \partial f = 0$, 则有

$$- \ln f(x, y) - 1 + \sum_{j=1}^{N_p} \sum_{m=1}^{M(j)} \lambda_{jm} \cdot \delta(x \cos \theta_j + y \sin \theta_j - E \sin \delta_{jm}) = 0 \quad (7)$$

则

$$f(x, y) = (1/e) \prod_{j=1}^{N_p} \prod_{m=1}^{M(j)} \exp[\lambda_{jm} \delta(x \cos \theta_j + y \sin \theta_j - E \sin \delta_{jm})] \quad (8)$$

等效地可以表示为:

$$f(x, y) = \prod_{j=1}^{N_p} \sum_{m=1}^{M(j)} H_{jm} \delta(x \cos \theta_j + y \sin \theta_j - E \sin \delta_{jm}) \quad (9)$$

其中 $H_{jm} = \exp(\lambda_{jm} - 1) / N$,

将(9)式代入(1)式, 得到:

$$P_{jm} = \int_I f(x, y) dt = H_{jm} \int_I dt \prod_k \sum_l H_{kl} \delta(S_k - S_m \cos \theta_{jk} + t \sin \theta_{jk}) \quad (10)$$

其中 $j = 1, 2, \dots, N_p; m = 1, 2, \dots, M(j); k \neq j, k = 1, 2, \dots, N_p; n = 1, 2, \dots, M(k)$

$$\theta_{jk} = \theta_j - \theta_k = (\delta_{jm} + \beta_j) - (\delta_{km} + \beta_k) = (\delta_{jm} - \delta_{km}) + (\beta_j - \beta_k)$$

用非线性 Gauss-Seidal 方法求解(10)方程组:

首先置初值 H_{jm} 为

$$H_{jm}^0 = 1 \quad m \in M(j) (P_{jm} > 0 \text{ 的所有 } m \text{ 的集合})$$

$$f(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \in \bar{D} \end{cases}$$

再运用循环迭代修正, 得:

$$\begin{cases} H_{jm}^{-1} = P_{jm} / \int dt \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N_p} \sum_{l=1}^{M(k)} H_{kl}^1 \delta(S_k - S_m \cos \theta_{jk} + t \sin \theta_{jk}) \\ = P_{jm} / \int dt w(t) & m \in M(j), j = i \bmod N_p + 1 \\ H_{jm}^{+1} = H_{jm} & m \in M(j), j \neq i \bmod N_p + 1 \end{cases} \quad (11)$$

公式(11)中 i 是迭代次数, $m(t) = \prod_{k=1}^{N_j} \sum_{l=1}^{M(t)} H_{kl} \delta(S_k - S_m \cos \theta_{jk} + t \sin \theta_{jk})$. 计算中着重求 $m(t)$.

对所有的 j 和 m ,参数 H_{jm} 全部被修正一次,完成一次迭代循环修正.经过多次迭代,将得到的 H_{jm} 作用于(9)式,便可以重建出图象.

上述被积函数在多角形上是分段常数,因此二重积分用有限步就能完成.经证明,最大熵法迭代过程收敛^[4],一般迭代1~2次即能收敛.

如果被测对象中有灰度值突变的情况,可以视被测物函数分段连续,再求解泛函,最大熵重建法仍然适用.

2 仿真实验

以国际通用“头部剖视图”(图2)为仿真对象,用最大熵积分递推法与卷积反投影法对比,按 256×256 象素采集重建,在486/33M微机实现,对多种不完全投影数据类型进行实验研究.

2.1 稀疏视角型数据

在 360° 内取投影角间隔很大的20个投影,每个投影256条射线,重建结果见图3.最大熵法重建图象质量远优于卷积反投影法.

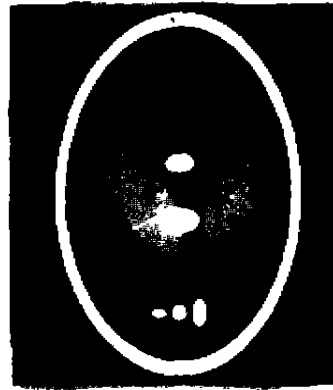


图2 头部剖视图

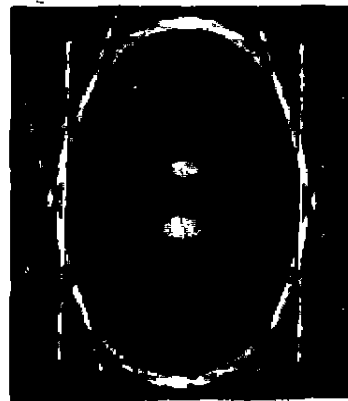
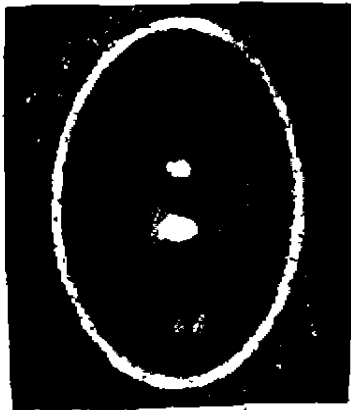


图3 稀疏视角型数据重建
(a) 最大熵法成象; (b) 卷积反投影成象



图 4 视角受限型数据重建

(a) 最大熵法成象; (b) 卷积反投影法成象

2.2 视角受限型数据

在 360° 内中间 54° 无投影, 共取 25 个视角, 每个视角 256 条射线, 重建结果见图 4. 在丢失视角方向卷积反投影法几何失真严重, 最大熵法失真轻微。

2.3 截断型数据

这是射线束不全包容被测物或检测器部分损坏所引起的数据丢失。在 360° 内均匀取 20 个视角, 射束中的射线丢失 50 条, 重建结果见图 5. 最大熵法能基本克服此类数据在卷积反投影法中所产生的严重几何失真。

2.4 中空型数据

由于无法采集到被测区域某部分投影数据而形成, 如存在“不透明”物质。这是视角受限型和截断型的综合结果。在 360° 内均匀取 25 个视角, 中间 54° 无投影, 同时射束中的射线丢失 40 条, 重建结果见图 6. 最大熵法虽有一定失真, 但明显优于卷积反投影法。为改善此类数据的最大熵重建, 可用迭代重建——再投影来估计丢失的数据。

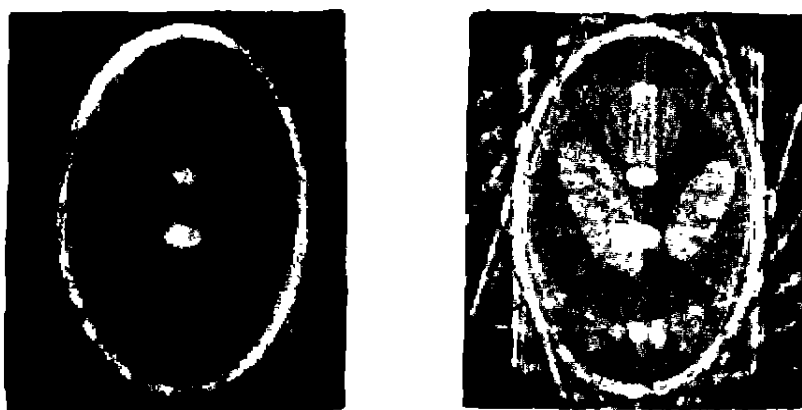


图 5 截断型数据重建

(a) 最大熵法成象; (b) 卷积反投影法成象

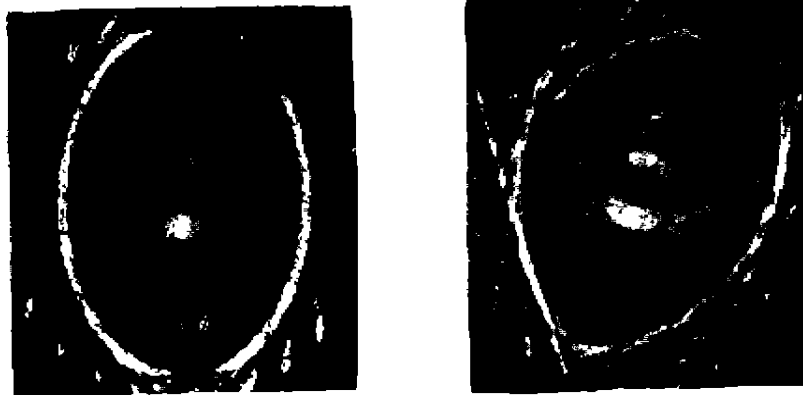


图6 中空型数据重建

(a) 最大熵法成象; (b) 卷积反投影法成象

3 讨 论

由上述仿真实验表明,在丢失一定投影数据后,最大熵法能重建出较好的图象,迭代过程稳定收敛;但随着投影数据丢失增加,图象质量也将下降。这是因为最大熵是基于统计理论模型建立的,是许多能量分布中具最大方法数的一种能量分布,是对图象可能出现形势的推测。丢失信息多相当于重建的约束减少,致使重建图象更多偏离真实图象。

实验结果表明,在不完全投影数据情况下,最大熵算法比完全投影数据类重建算法(如卷积反投影法)在图象质量上具较强优势,但在重建速度上较慢。最大熵法重建时间 t_{MENT} 与卷积反投影法重建时间 t_{CBP} 的关系为: $t_{MENT} \approx (N \cdot i) t_{CBP}$, 其中 N , 为分度数, i 是迭代次数。

因此最大熵重建算法在以一定重建时间为代价情况下,是一种有效的算法,有实用价值。

参 考 文 献

- 1 Wernecke S J. Maximum entropy image reconstruction. IEEE Trans Comput, 1977, C-26, 351~364
- 2 Minerbo G. MENT; maximum entropy algorithm reconstructing a source from projection data. Comput Graph and Imag Processing, 1979, 10, 46~68
- 3 钟志刚,梅雁诚,王延平. 不完全投影的最大熵图象重建. 武汉大学学报, 1992, 38(3): 48~54
- 4 陈浩球,李潜生. 用不完全数据重建图象的最大熵递推法. 东南大学学报, 1989, 19(5): 25~31