

(20) 113-116

• 研究简报 •

正交小波基的构造及算法设计

李波 朱庆生

(重庆大学计算机系, 重庆, 400044; 第一作者 31岁, 男, 博士生)

TN919.8
TN911.1

摘要 首先对小波分析的基本原理作了简要介绍, 然后从图象信号完全重建的角度对几种小波基进行总结。着重指出: 对于子带分解的小波基等价于在正则条件下, 设计滤波器组; 最后给出 Daubechies 基的小波生成算法及实验结果。

关键词 小波基设计; 滤波器; 图象重建

中国图书资料分类法分类号 TN918.8

正交小波基

0 引言

随着多媒体技术的迅速发展, 数据压缩技术变得越来越重要, 小波变换被认为作为一种新的有效的压缩工具受到许多学者的重视, 利用小波变换进行图像处理时, 常常会遇到寻找最佳小波基的问题, 所以根据应用需要设计合适的小波基是小波应用的关键问题。笔者设计了一个子带完全恢复或近似完全恢复的滤波器组, 给出了一类小波基的生成算法及相应的实验结果。

下面就本文多处用到的有关概念, 先作一简要介绍。

对一函数 f 进行小波分解, 就是用经过一个称为小波函数 Φ 进行伸缩和位移而形成的一组小波基 $\Phi_{m,n}$ 来对 f 进行展开, 即

$$f = \sum C_{m,n}(f) \Phi_{m,n} \quad (1)$$

这几 m 为尺度参数, n 为位移参数, $C_{m,n}(f)$ 为用 $\{\Phi_{m,n}\}$ 对 f 展开而得到的系数, 它可由

$$C_{m,n}(f) = \langle \Phi_{m,n}, f \rangle = \int \Phi_{m,n}(x) f(x) dx \quad (2)$$

得到, 在离散条件下, $\Phi_{m,n}$ 可表示为

$$\Phi_{m,n}(x) = 2^{-\frac{n}{2}} \Phi(2^{-n}x - n) \quad (3)$$

Mallat 从多分辨分析出发, 建立了正交小波变换与 QMF 的联系。对于多分辨子空间 $\{V_j\}$ $j \in \mathbb{Z}$ 存在函数 $\Phi(t)$, 使得 $\{\Phi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \Phi(2^{-j}t - k)\}$, $R \in \mathbb{Z}$ 构成 V_j 的规范正交基, $\Phi(t)$ 满足下面的双尺度方程:

• 收文日期 1996-10-11

国家教委和重庆市科委优秀青年教师基金资助项目

$$2^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{t}{2}\right) = \sum h(k)\Phi(t-k) \quad (4)$$

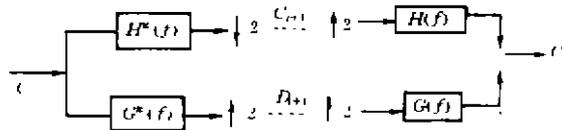
$h(k)$ 称为滤波系数, 如果令

$$\Phi(t) = \sum (-1)^k \sqrt{2} h(1-k)\Phi(2t-k) \quad (5)$$

由 $\Phi(t)$ 称为小波。滤波系数 $h(k)$ 与小波函数一一对应。在数据压缩、信号分析及图像处理中只要用到 $h(k)$ 就够了。

1 小波基的构造方法

在不同的应用场合下, 设计不同的小波基函数是实现信号处理与分析的必要前提, 也是目前小波理论研究的重要问题。这里我们就子带信号分解方式的小波基构造的方法作一介绍。一个信号的子带分解与恢复由下图给出:



附图 信号的子带分解与恢复

C_1 为原始输入信号, C_2 为恢复信号, H^*, G^* 为两个分析滤波器, H, G 为恢复滤波器。在上面的系统中取 Z 变换得

$$\begin{aligned} \hat{X}(z) = & [H^*(z)H(z) + G^*(z)G(z)] / 2 + \\ & [H^*(-z)G(z) + G^*(-z)H(z)] C_1(-z) / 2 \end{aligned}$$

要实现图象的完全重建, 则要求

$$H^*(z)H(z) + G^*(z)G(z) = \text{Const} \quad (4)$$

$$H^*(z)G(z) + G^*(-z)H(z) = 0 \quad (5)$$

这样小波基的设计就归结为在正则条件下, 选择合适的 H^*, H, G^*, G 以满足(4)、(5)两式。

Daubechies 在假设 $G^*(z) = -z^{-1}H(-z)$ 的条件下将(4)、(5)两式中4个未知量 H^*, H, G^*, G 减少为一个未知量 H^* , 可由方程

$$|H^*(z)|^2 + |H^*(-z)|^2 = C$$

得到一类具有有限紧支集的正交小波基的解的形式为

$$M_N(\xi) = [1/2(1 + e^{\xi})]^N Q(e^{\xi})$$

其中 $Q(e^{\xi})$ 是一个多项式, 满足

$$|Q(e^{\xi})|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1+k}{k} \sin^{2k}(1/2\xi) + \sin^{2N}(1/2\xi) \cdot R(1/2\cos\xi)$$

这儿 $R(1/2\cos\zeta)$ 是关于 $\cos\zeta$ 的奇次多项式。选择适当的 $N, R(1/2\cos\zeta)$, 可得 $M_N(\zeta)$, 可得用

$$M_N(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{2M-1} h(n)e^{in\zeta}$$

求得相应的 $h(n)$ 。

2 Daubechies 基的算法设计及实现

由前面的讨论可知, 小波基设计的关键在于求出相应的 $h(n)$, 而 $h(n)$ 的求法取决于小波基的构造方法。对于 Daubechies 基, 它们的解与函数 $|Q(e^{\zeta})|$ 相联系。因此必须通过分解 $|Q(e^{\zeta})|$ 来求得相应的 $Q(e^{\zeta})$ 。Daubechies^[1] 给出了 $N \leq 10$ 时 $h(n)$ 的值, 参考 Daubechies 的方法, 结合信号分解理论, 笔者设计了求 $h(n)$ 的算法, 并编制了软件, 求出 $10 < N \leq 15$ 的 $h(n)$ 值。

算法步骤:

- 1) 选取自然数 $N \geq 2$, 令 $R = 0$, 得到 $|Q(e^{\zeta})|^2$ 的表达式;
- 2) 将 $|Q(e^{\zeta})|^2$ 转化为 $\cos\zeta$ 的函数, 并用 ω 代替 $\cos\zeta$, 从而得到一个关于 ω 的一元高次方程 $V(\omega)$;
- 3) 求解 $V(\omega)$ 的所有根 ω_1 ;
- 4) 由 $\omega_1 = (z + 1/z)$ 得到相应的 z_1 ;
- 5) 取出每对实根中的一个, 每两对复根中的一对从而构成 $Q(z) = A \prod (z - z_i)$;
- 6) 由 $Q(1) = \sqrt{V(1)}$ 确定 A ;
- 7) 由 $Q(z)$ 求 $h(n)$ 。

根据这个算法, 笔者得到了 $10 < N \leq 15$ 时 $h(k)$ 的值。由于篇幅所限, 我们给出 $N = 11$ 时的 $h(n)$ 的值:

| $N = 11$ | n | $h(n)$ |
|----------|-----|------------|
| | 0 | 0.0186943 |
| | 1 | 0.1440670 |
| | 2 | 0.4498997 |
| | 3 | 0.6856867 |
| | 4 | 0.4119643 |
| | 5 | -0.1622752 |
| | 6 | -0.2742308 |
| | 7 | 0.0660435 |
| | 8 | 0.1498120 |
| | 9 | -0.0464799 |
| | 10 | -0.664389 |
| | 11 | 0.031350 |
| | 12 | 0.208409 |

| | |
|----|-------------|
| 13 | — 0.0153648 |
| 14 | — 0.0033408 |
| 15 | 0.0049284 |
| 16 | — 0.0003086 |
| 17 | — 0.0008930 |
| 18 | 0.0002491 |
| 19 | 0.0000544 |
| 20 | — 0.0000346 |
| 21 | 0.0000045 |

3 结 论

本文所设计的算法在实际应用中是很效的,充分利用了求解 $V(\omega)$ 的许多有效算法。但在求解 $N > 15$ 的 $h(n)$ 之值时,此算法速度较慢,原因在于求解 $V(\omega)$ 此时变得较为困难,但在处理图象编码时一般用不到这样的值。

参 考 文 献

- 1 Antonizi M, Barland M, Mathieu P, Daubechies I. Image Coding Using Vector Quantization in the Wavelet Transform Domain. In Karlsson & Vetteli Eds. Proc of ICASSP' 90, New Mexico, 1990. 2297~2300
- 2 Gurski G C. Optimal Linear Filters for Pyramidal Decomposition. IEEE Trans. on Signal Processing, 1996, 41(5): 1790~1808
- 3 龙瑞麟. 高维小波分析. 北京:世界图书出版公司, 1995. 76~115
- 4 Vetterli M, Wavelet, Filter Banks. Theory and Design. IEEE Trans. Signal Processing, 1992, 40(9): 2207~2232

Construction of Orthogonal Wavelets Bases and Design of Algorithm

Li Bo *Zhu Qingsheng*

(Department of Computer Science, Chongqing University)

ABSTRACT Based on the brief introduction of the principle of wavelet analysis, a summary of several typical wavelet bases from the point of view of perfect reconstruction of an image is given. It is emphasized that designing wavelet bases which are used to decompose the image into sub-band form is equivalent to designing a filters with perfect or nearly perfect property. The generating algorithm corresponding to Daubechies bases and some simulation results are also show in this paper.

KEYWORDS wavelet bases design; filters; reconstruction of image