

② 117-125

· 综述 ·

泡沫材料连续模型的本构关系^{*}

TB301

刘占芳^{①*}

唐录成^②

(① 重庆大学工程力学系, 重庆, 400044; ② 中国工程物理研究院, 第一作者 34 岁, 男, 教授, 博士)

摘要 提出了基于混合物理论的泡沫材料连续模型的本构关系。引进体积分数的概念, 在理性热力学公理的框架内, 通过考察本构关系的热力学约束, 建立了能够反映复杂热力学条件的固-气两相泡沫材料的本构方程。

关键词 泡沫材料; 多孔介质; 本构关系; 理性热力学

中国图书资料分类法分类号 O33

~~连续模型~~

0 引言

模型

泡沫材料作为一种多孔材料, 国际上对其本构关系的研究可分为两个阶段。第一个阶段是基于经验和实验来建立材料的本构关系, 其理论研究最初源于 Terzaghi^[1]对土的固结的数学描述, 他所给出的描述固结过程的微分方程是根据实验结果凭经验给出的, 并限定在一维和小孔压的情况。Terzaghi 的固结理论受到了 Fillunger^[2]的强烈批评, 后者的观点是固结的理论分析必须建立在水力学的基本方程基础上, 因此, 对每种组份他应用了质量守恒方程及考虑了组份间相互作用力的动量守恒方程, 他进一步地考察了有限变形并最早使用了体积分数的概念。接着 Biot^[3,4]推广了 Terzaghi 的固结理论, 可以考虑在三维情况下和随时间变化的外载荷作用下的动力响应, 其本构方程的建立是通过引进一些附加的耦和参数, 把弹性理论推广到两相系统, 这些决定土物性的物理参数是按着预测沉降量的一般方程形式及三维情况下的应力来加以定义的。Frenkel^[5]研究了湿土中的地震放电现象, 对此他建立了近似于 Biot 工作的湿土的静力描述方程, 并导出了考虑相间摩擦力的固体和液体组份的运动方程。本世纪 60 年代初, Heinrich 和 Desoyer^[6]以 Fillunger 的概念作为基本点, 探讨了水在多孔介质中的流动, 进而研究了粘土层中的三维沉降问题; 此外他们以介质迭加为基础来描述多孔介质, 应用了每种组份的质量及动量平衡方程, 借助体积分数的概念, 将局部组份模糊地分布在整个材料的空间上。他们的研究方法与现代多孔介质理论极为相似。

现代多孔介质理论的建立可以上溯到 1959 年, 即在连续介质力学框架内的混合物理论的建立, 这年 Truesdell 和 Toupin^[7]发表了任一组成成份的混合物的质量、动量及能量的局部平衡方程, 其中包括描述各单一组份间的相互作用的相应的耦和项, 但没有考虑动量矩的

* 收文日期 1997-07-05

国家自然科学基金资助项目(19402020)

** 重庆大学机械传动国家重点实验室研究人员

平衡方程和混合物的熵表述。关于动量矩的平衡方程,由于 Kelly^[8]引进动量矩的耦和项,从而允许非对称应力的出现,最后完成了对该平衡方程的表述,今天 Truesdell 的平衡方程和 Kelly 的动量矩平衡方程作为混合物理论的基本平衡方程已得到普遍承认。

60 年代初期, Coleman^[9]发展了熵不等式对本构方程的热力学约束,但是对混合物建立熵原理产生了很大的困难^[10]。此后 Bowen^[11]提出的熵不等式被认为是混合物的熵不等式的第一个正确形式,他利用所谓的化学势张量给出了混合物的熵不等式的表达式,化学势张量与应力的关系决定了本构关系的具体形式。Müller^[12]基于热力学原理研究了流体混合物的本构理论。他的熵不等式基本上与 Bowen 的结果等效,所不同的是他假定了熵流和热供给的一个特殊关系式,他对这种不均匀的流体介质的研究不仅考虑密度,并且考虑密度的梯度作为独立的热力学本构变量。混合物理论的热力学研究在 70 年代基本得以完善,今天已得到普遍应用。Bowen 的《混合物理论》^[13]一书对混合物的发展和结果作了一个总结,他的书中尚包括一个多孔介质(充填气体)的模型,但是他没有应用体积分数的概念。

现代多孔介质理论的基础就是混合物理论,在连续介质力学的框架内,Drumheller^[14]基于混合物理论,应用体积分数的概念描述了空的多孔固体,即体积分数是作为一个独立的本构变量,Drumheller 的工作被 Bowen^[15,16]用于描述不可压及可压的饱和多孔固体。

综上所述,经典的多孔介质理论源于粗糙的经验而有其固有的缺陷,基于混合物理论的现代多孔介质理论优于经典的多孔介质的理论,因此泡沫材料的本构关系应该也必须应用现代多孔介质理论的成果,来描述材料的本构关系及其响应特性。笔者在综合大量的前人对多组份材料(混合物)的连续介质力学的研究成果的基础上,包括对多孔材料的运动学分析、场方程的建立以及热力学地推导本构方程,从而为描述泡沫材料的力学特性和响应分析,发展一种完善的本构模型。

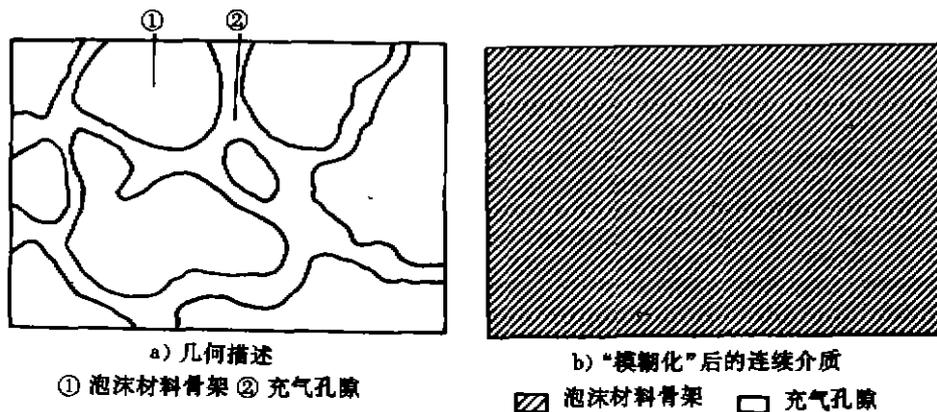


图 1 泡沫材料的固-气两相连续介质模型

典型的泡沫材料是由某种多孔固体构成骨架,孔隙中充填着气体,其中的孔隙结构如此之复杂以致于一般不可能对此进行精确的数学描述。对这些孔隙系和固体骨架与孔隙中充填物之间的相互作用进行精确描述会产生极大的困难,所以我们把泡沫材料假定作为一种多孔介质的两相物理模型;固体骨架和空隙中气体同时充满了整个体积空间,即每一种组份各自独立地占据了“模糊化模型”的全部空间,见图 1。为刻划多组份材料中各个组份在整个

材料空间上的分布,现代多孔介质理论引入了体积分数的概念。体积分数为任一空间位置 x 上某种组份的局部体积元与实际体积元之比,有下面的形式:

$$n^\gamma = n^\gamma(x, t), \gamma = S(\text{solid}), G(\text{gas}) \quad (1)$$

当泡沫材料中充满气体时,体积分分数满足饱和条件:

$$n^S + n^G = 1 \quad (2)$$

1 泡沫材料的运动学

泡沫材料是由固 - 气两种组份组成的不相混溶的两相混合物材料,即在固 - 气两相泡沫材料的当前构形上,任一时刻、任一空间位置 x 同时被两种组份的两个质点所占据,并且这两个质点来自于初始构形中的不同位置 X_γ , 参见图 2, 这里每一种组份赋予了独自的运动函数:

$$x = \mathcal{X}_\gamma(X_\gamma, t) \quad (3)$$

上式中函数 \mathcal{X}_γ 是两种组份中的某一种的变形函数,假定反函数存在,即

$$X_\gamma = \mathcal{X}_\gamma^{-1}(x, t) \quad (4)$$

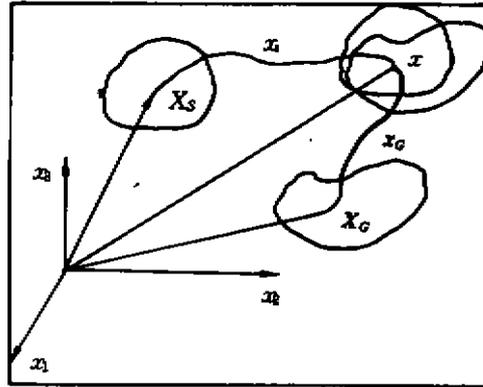


图 2 泡沫材料的两组份介质的运动学

上式保证初始构形中的一个质点不能同时占据两个空间点,以及某种组份的两个质点不能同时占据一个空间位置。那么利用(3)式,某种组份的速度和加速度定义为:

$$x'_\gamma = \frac{\partial \mathcal{X}_\gamma(X_\gamma, t)}{\partial t}, \quad x''_\gamma = \frac{\partial^2 \mathcal{X}_\gamma(X_\gamma, t)}{\partial t^2} \quad (5)$$

由于运动函数的反函数的存在,速度和加速度也可写成:

$$x'_\gamma = x'_\gamma(x, t), \quad x''_\gamma = x''_\gamma(x, t) \quad (6)$$

某种组份的变形梯度 F_γ 和其逆为:

$$F_\gamma = \text{Grad}_\gamma x, \quad F_\gamma^{-1} = \text{grad} X_\gamma \quad (7)$$

上式中符号 Grad_γ 是对 γ 组份的物质导数,而 grad 则表示对空间坐标求导。某种组份的变形梯度行列式为:

$$\det F_\gamma > 0 \quad (8)$$

某种组份的物质速度梯度为:

$$(F_\gamma)_{\bar{\gamma}}^{-1} = \text{Grad}_\gamma x'_\gamma \quad (9)$$

而空间速度梯度为:
$$L_r = \text{grad}x_r' \quad (10)$$

某种组份的空间速度梯度 L_r 可以分解为下面的形式:

$$D_r = \frac{1}{2}(L_r + L_r^T), \quad W_r = \frac{1}{2}(L_r - L_r^T) \quad (11)$$

式中 L_r^T 表示 L_r 的转置, D_r 和 W_r 分别表示两种组份的变形率和旋转率。

2 平衡方程及熵不等式

泡沫材料的平衡定律不仅要对其固-气两种组份的某种组份建立,还必须引进适当的耦合项描述两种组份间的物理、化学交换,并且要对两种组份的平衡方程之和进行考察,而后者在原理上必须与单一组份的经典连续介质力学的平衡定律等效。

质量平衡方程

固-气泡沫材料中某一组份的质量平衡方程为:

$$(\rho^r)'_t + \rho^r \text{div}x_r' = 0 \quad (12)$$

式中 ρ^r 为某种组份的密度。

动量平衡方程

固-气泡沫材料中某一组份的线动量平衡方程为:

$$\text{div}T^r + \rho^r(b^r - x_r') + \hat{p}^r = 0 \quad (13)$$

这里 T^r 是组份的 Cauchy 应力张量, b^r 是组份的外体力密度, 量 $\hat{p}^r = \hat{p}^r(x, t)$ 代表了固-气两种组份间的相互作用力。对线动量平衡方程进行求和运算得到:

$$\hat{p}^s + \hat{p}^G = 0 \quad (14)$$

角动量平衡方程

固-气泡沫材料中某一组份的角动量平衡方程是:

$$T^r = T^{rT} - M^r \quad (15)$$

其中 M^r 是反对称张量, 它满足:

$$\dot{m}^r = \frac{1}{2}(I \times M^r) \quad (16)$$

式中 \dot{m}^r 代表固-气两种组份间的角动量的耦合和作用项, 对组份的角动量平衡方程求和后代:

$$\dot{M}^s + \dot{M}^G = 0 \quad (17)$$

能量平衡方程(固-气两种组份的热力学第一定律)

某种组份的能量平衡方程具有下面的形式:

$$\rho^r(\dot{e}^r)'_t = -\hat{p}^r \cdot x_r' + T^r \cdot L_r + \rho^r r^r - \text{div}q^r + \hat{e}^r \quad (18)$$

式中 e^r 是该组份每单位质量的比内能, r^r 是外热, q^r 是能流矢量, 量 $\hat{e}^r = \hat{e}^r(x, t)$ 表示固-气两种组份间的能量交换项, 对两种组份的能量平衡方程进行求和运算得到:

$$\dot{e}^s + \dot{e}^G = 0 \quad (19)$$

熵不等式或泡沫材料的热力学第二定律(耗散原理)

文献中对混合物的热力学第二定律的适当形式进行了大量的讨论^[17], 我们认为熵不等式应该针对固-气两相泡沫材料的整体而非某种组份而建立, 如果 η^r 表示组份的熵密度, 并且每种组份具有各自的绝对温度 θ^r , 接着 de Boer 和 Ehlers 的研究结果, 熵不等式取下面的形

式:

$$\sum_{\gamma=S,G} \left[\rho^\gamma (\eta^\gamma)'_\gamma + \operatorname{div} \left(\frac{1}{\theta^\gamma} \mathbf{q}^\gamma \right) - \frac{1}{\theta^\gamma} \rho^\gamma r^\gamma \right] \geq 0 \quad (20)$$

上式与 Bowen^[13] 的结果是一致的,若借助能量平衡方程,则熵不等式还可改写成下面的形式:

$$\sum_{\gamma=S,G} \frac{1}{\theta^\gamma} \left[-\rho^\gamma ((\epsilon^\gamma)'_\gamma - \theta^\gamma (\eta^\gamma)'_\gamma) - \tilde{\mathbf{p}}^\gamma \cdot \mathbf{x}'_\gamma + \mathbf{T}^\gamma \cdot \mathbf{L}_\gamma - \frac{1}{\theta^\gamma} \mathbf{q}^\gamma \cdot \operatorname{grad} \theta^\gamma + \dot{\epsilon}^\gamma \right] \geq 0 \quad (21)$$

3 固 - 气两相泡沫材料的本构关系

为了决定泡沫材料的本构关系,必须借助 Helmholtz 自由能和化学势张量^[13,17],那么熵不等式写成下面的形式:

$$\sum_{\gamma=S,G} \frac{1}{\theta^\gamma} \left[-((\Psi^\gamma)'_\gamma - (\theta^\gamma)'_\gamma) \Pi^\gamma - \tilde{\mathbf{p}}^\gamma \cdot \mathbf{x}'_\gamma - \rho^\gamma (\mathbf{K}^\gamma)^T \cdot \mathbf{L}_\gamma - \frac{1}{\theta^\gamma} \mathbf{q}^\gamma \cdot \operatorname{grad} \theta^\gamma + \dot{\epsilon}^\gamma \right] \geq 0 \quad (22)$$

上式中引进了下面的定义:

$$\begin{aligned} \Phi^\gamma &= \epsilon^\gamma - \theta^\gamma \eta^\gamma, \quad \Psi^\gamma = \rho^\gamma \epsilon^\gamma - \theta^\gamma \Pi^\gamma \\ \mathcal{V}^\gamma &= \rho^\gamma \Phi^\gamma, \quad \Pi^\gamma = \rho^\gamma \eta^\gamma \end{aligned} \quad (23)$$

这里 Φ^γ 和 Ψ^γ 分别表示某组份的固 - 气混合物的质量元 $\rho^\gamma dv$ 和体积元 dv 的 Helmholtz 自由能, Π^γ 则为固 - 气混合物的体积元的熵密度。熵不等式中,化学势张量为:

$$\mathbf{K}^\gamma = \Phi^\gamma \mathbf{I} - \frac{1}{\rho^\gamma} (\mathbf{T}^\gamma)^T \quad (24)$$

此式是由 Bowen^[13] 引进。进一步地,某组份的能量平衡方程的形式可改写为:

$$\begin{aligned} & -(\Psi^\gamma)'_\gamma - \theta^\gamma (\Pi^\gamma)'_\gamma - \Pi^\gamma [(\theta^\gamma)'_\gamma + \theta^\gamma \operatorname{div} \mathbf{x}'_\gamma] \\ & - \rho^\gamma (\mathbf{K}^\gamma)^T \cdot \mathbf{L}_\gamma + \rho^\gamma r^\gamma - \operatorname{div} \mathbf{q}^\gamma + \dot{\epsilon}^\gamma = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

下面建立几个本构假定:

- ① 忽略动量矩的耦和效应,即,

$$\mathbf{M}^\gamma = 0 \quad (26)$$

- ② 固 - 气两种组份具有同样的温度,即,

$$\theta^\gamma = \theta(\mathbf{x}, t) \quad (27)$$

- ③ 热力学过程中的两种组份的真实密度保持不变,即,

$$\rho^\gamma = n^\gamma \rho^{\gamma R}, \rho^{\gamma R} = \text{const.} \quad (28)$$

而体积分数 n^γ 并非变形过程中的常数,所以固 - 气两种组份的局部密度在热力学过程中随时间和空间位置的变化而变化。

根据式(12)和(28),组份的质量守恒方程变成对体积分数的平衡方程:

$$(n^\gamma)'_\gamma + n^\gamma \operatorname{div} \mathbf{x}'_\gamma = 0 \quad (29)$$

固 - 气两种组份的真实密度 $\rho^{\gamma R}$ 的保持不变的特性导致了熵不等式和能量平衡方程的内部约束。对于孔隙中充满气体的泡沫材料,满足饱和条件(2),因此随同泡沫材料固体骨架运动的物质导数为:

$$(n^S + n^G)'_s = 0 \quad (30)$$

结合(29)式,则内部约束成为:

$$\pi^s \operatorname{div} x'_s + \pi^c \operatorname{div} x'_c + \operatorname{grad} \pi^c \cdot (x'_c - x'_s) = 0 \quad (31)$$

约束(31)在乘以一个具有应力量纲的 Langrangian 乘子后,必须加到熵不等式(22)和能量平衡方程式(25)中,故对于泡沫材料,熵不等式和能量平衡方程进一步分别改写成:

$$\begin{aligned} & -(\Psi^s)'_s - (\Psi^c)'_c - \theta \Pi - (\hat{p}^c - \lambda \operatorname{grad} \pi^c) \cdot (x'_c - x'_s) - (\rho^s \mathbf{K}^s - \pi^s \lambda \mathbf{I}) \cdot \mathbf{D}_s \\ & - (\rho^c \mathbf{K}^c - \pi^c \lambda \mathbf{I}) \cdot \mathbf{D}_c - \frac{1}{\theta} \mathbf{h} \cdot \operatorname{grad} \theta \geq 0 \end{aligned} \quad (32)$$

以及

$$\begin{aligned} & -(\Psi^s)'_s - (\Psi^c)'_c - \theta \Pi - \Pi(\theta + \theta \operatorname{div} \dot{x}) - (\hat{p}^c - \lambda \operatorname{grad} \pi^c) \cdot (x'_c - x'_s) \\ & - (\rho^s \mathbf{K}^s - \pi^s \lambda \mathbf{I}) \cdot \mathbf{L}_s - (\rho^c \mathbf{K}^c - \pi^c \lambda \mathbf{I}) \cdot \mathbf{L}_c + \rho r - \operatorname{div} \mathbf{h} = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

其中 \mathbf{h} 是泡沫材料的流矢量:

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}^s + \mathbf{h}^c, \quad \mathbf{h}^i = \mathbf{q}^i + \theta \Pi^i \mathbf{u}_i \quad (34)$$

这里 \mathbf{h}^i 是固-气两种组份的流矢量, \mathbf{u}_i 是某种组份的扩散速度。同时泡沫材料的熵应为:

$$\Pi = \Pi^s + \Pi^c \quad (35)$$

在连续介质力学中,建立本构方程的基础是确定性原理、等存在性原理、局部作用原理、客观性原理(标架无差异原理)和耗散原理。首先基于确定性原理,下面一组量应由本构方程加以决定:

$$R = \{\Psi^s, \Psi^c, \Pi, \hat{p}^c - \lambda \operatorname{grad} \pi^c, \rho^s \mathbf{K}^s - \pi^s \lambda \mathbf{I}, \rho^c \mathbf{K}^c - \pi^c \lambda \mathbf{I}, \mathbf{h}\} \quad (36)$$

这里, R 代表了一组全部的响应函数,它们必须满足前面提到的平衡方程、熵不等式以及体积分数的概念。

根据等存在性原理, R 中的这组热力学变量必须是下面一组公共自变量 $\varphi(x, t)$ 的函数,即:

$$R = R(\varphi) \quad (37)$$

R 中的这组函数以下面的方式决定,即在 (x, t) 处的函数值由热力学过程变量 $\varphi(x, t)$ 的值决定,这表达了局部作用原理。对于泡沫材料,这组独立的热力学变量由下式给出:

$$\varphi = \{\theta, \operatorname{grad} \theta, \mathbf{F}_s, \operatorname{Grad} \mathbf{F}_s, \rho^s, \operatorname{grad} \rho^s, \pi^c, \operatorname{grad} \pi^c, \rho^c, \operatorname{grad} \rho^c, x'_s, x'_c, L_c\} \quad (38)$$

上式中过程变量的选择是引进二阶变形梯度的直接结果,注意到泡沫材料骨架的体积分数 π^s 和其梯度 $\operatorname{grad} \pi^s$ 不能作为独立的本构变量。

考虑到固-气两相组份间没有质量交换,则泡沫材料骨架的密度 ρ^s 和其梯度 $\operatorname{grad} \rho^s$ 表为:

$$\rho^s = \rho_{0s}^s (\det \mathbf{F}_s)^{-1} \quad (39)$$

$$\operatorname{grad} \rho^s = -\rho_{0s}^s (\det \mathbf{F}_s)^{-1} \mathbf{F}_s^T{}^{-1} \operatorname{Grad}_s \mathbf{F}_s$$

所以 ρ^s 和 $\operatorname{grad} \rho^s$ 都是 \mathbf{F}_s 和 $\operatorname{Grad}_s \mathbf{F}_s$ 的函数,即泡沫材料骨架的密度 ρ^s 和其梯度不是独立的热力学本构变量。上式中符号 $(\dots)^1$ 表示括号中的张量进行缩积运算成为一阶张量(矢量)。进而,忆及两相泡沫材料的两个组份的真实密度不变的约定以及下面的关系:

$$\rho^c = \pi^c \rho^{cR}, \quad \operatorname{grad} \rho^c = \rho^{cR} \operatorname{grad} \pi^c \quad (40)$$

此外有

$$\begin{aligned} \pi^c &= 1 - \pi_{0s}^s (\det \mathbf{F}_s)^{-1} \\ \operatorname{grad} \pi^c &= \pi_{0s}^s (\det \mathbf{F}_s)^{-1} \mathbf{F}_s^T{}^{-1} (\mathbf{F}_s^T{}^{-1} \operatorname{Grad}_s \mathbf{F}_s)^1 \end{aligned} \quad (41)$$

成立。由式(39)~(41),不难看出泡沫材料的两种组份的密度、气体的体积分数以及它们的梯度不再是独立的热力学本构变量,因此本构变量组的最后形式应为(去掉非独立的自变量):

$$\varphi = \{\theta, \text{grad}\theta, F_S, \text{Grad}F_S, x'_G - x'_S, D_G\} \quad (42)$$

上式中应用了客观性原理。接着要考察耗散原理(熵不等式)对本构假定即式(37)和(42)的约束。然而在理性热力学的框架内,其推导过程是冗长繁杂的,因此,这里列出主要推导结果:

$$T^S = (\Psi^S - \pi^S \lambda I) + \frac{\partial(\Psi^S + \Psi^G)}{\partial F_S} F_S^T \quad (43)$$

$$T^G = (\Psi^G - \pi^G \lambda I) + 2\mu^G D_G + \left(\frac{2}{3}\mu^G + \lambda^G\right)(D_G \cdot I)I \quad (44)$$

$$h = -\beta_0 \text{grad}\theta + \theta \alpha_0 (x'_G - x'_S) - \theta \frac{\partial \Psi^S}{\partial \theta} u_S - \theta \frac{\partial \Psi^G}{\partial \theta} u_G \quad (45)$$

$$\hat{p}^G = -\alpha_0 \text{grad}\theta - \alpha_0 (x'_G - x'_S) + \lambda^G \text{grad}\pi^G - F_S^{T-1} \left(\frac{\partial \Psi^G}{\partial F_S} \text{Grad}_S F_S \right)^1 \quad (46)$$

其中 D_G 表示 D_G 的偏斜部分,必须提及的是能量耦和项的本构关系没有进行推导,因为可以利用能量平衡方程计算出泡沫材料的温度变化。注意到式(34),可得流矢量的下列形式:

$$h = q^S + q^G + \theta \Pi^G u_S + \theta \Pi^G u_G \quad (47)$$

如果假定:

$$q^S + q^G = -\beta_0 \text{grad}\theta \quad (48)$$

根据式(35)和(48),得到:

$$\Pi^S = -\left(\frac{\partial \Psi^S}{\partial \theta} + \alpha_0\right), \quad \Pi^G = -\left(\frac{\partial \Psi^G}{\partial \theta} + \alpha_0\right) \quad (49)$$

因此可以认为 α_0 是具同一温度的固-气两相模型的熵耦和参数,而 β_0 是这个系统的热传导系数。在各向同性气体渗透情况下,

$$\alpha_0 = \frac{(n^G)^2 \gamma^{GR}}{M^G} \quad (50)$$

式中 γ^{GR} 是充填气体的真实比重, M^G 是气体的渗透系数。

如果忽略充填气体的粘性,充填气体的 Cauchy 应力写成:

$$T^G = -\pi^G \rho I, \quad \rho = \lambda - \frac{\Psi^G}{\pi^G} \quad (51)$$

这里 ρ 实际上是作用在泡沫骨架的未知的气体压力。

最后,根据式(23)_{3,4} 并联合(43)、(44)、(46)和(51),得到如下的本构关系:

$$T^S = -\pi^S \rho I + T^{\hat{S}} \quad (52)$$

$$T^G = -\pi^G \rho I + T^{\hat{G}} \quad (53)$$

$$\hat{p}^G = -\mu^G \text{grad}\pi^G + \hat{p}^{\hat{G}} \quad (54)$$

其中

$$T^{\hat{S}} = \left(\rho^S \frac{\partial \Psi^S}{\partial F_S} + \rho^G \frac{\partial \Psi^G}{\partial F_S} \right) F_S^T \quad (55)$$

$$T^{\hat{G}} = 2\mu^G D_G + \lambda^G (D_G \cdot I)I \quad (56)$$

$$\hat{p}^{\hat{G}} = -\alpha_0 \text{grad}\theta - \alpha_0 (x'_G - x'_S) - F_S^{T-1} \left(\rho^G \frac{\partial \Psi^G}{\partial F_S} \text{Grad}_S F_S \right)^1 \quad (57)$$

传统上,符号 $(\dots)_E$ 表示相应的有效量,由本构关系(52)~(54)不难看出,总应力张量的有效量可以解释为有效应力。

4 结 语

多孔材料如比较典型的泡沫材料类,有很长的研究历史,对多孔材料进行系统的分析应归功于 Terzaghi 对饱水土的固结分析。在传统的从现象-理论模型-实验分析-工程应用这个框架中,人们大多采用 Biot 的多孔介质理论。然而 Biot 理论的本构模型不能满足连续介质理论对该模型的要求,这是因为连续介质力学完善的建立迟于 Biot 的理论。正如经典力学之于连续介质力学,传统的多孔介质理论也不能在多组份理论的公理化的约束下,完整地、系统地克服传统框架固有的缺陷,热力学发展多孔介质的本构关系。由于基于混合物理论发展多孔介质的新型的本构关系所带来的复杂性,使国际上众多的学者望而却步,这也是直至今天仍有人在修正 Biot 的理论,却不采用混合物理论成果的主要原因。为了全面描述泡沫材料的本构关系,显然需要混合物理论框架中的公理化方法,来发展一种有深厚的热力学基础,能够反映诸如任一外载、温度变化、体积分数的改变等完善的泡沫材料的本构关系。同时,泡沫材料在物理上作为一种完全混合的、迭加的介质来考察,从而建立了泡沫材料的两相物理模型。

在泡沫材料的本构关系中,体积分数的引入是一个重要概念。实际上,在泡沫材料中,气体的体积分数 n^G 就是所谓的孔隙度。体积分数使得局部组份模糊地分布在整个材料空间上,进而把局部组份的各个力学量定义在泡沫材料的全部控制空间上,从而能够清晰地考察固-气两相泡沫材料中的这些量。引入体积分数的概念为本模型的最重要特点,从而区别于其他多数学者的现代多孔介质理论。两相泡沫材料的质量、动量、动量矩及能量平衡方程不仅针对材料中的某一组份,而且对泡沫材料本身给出;但对于熵不等式的表述,本构关系应用了混合物理论的研究成果,只对泡沫材料本身的熵不等式进行考察,不再单独对两种组份分别进行考察。

泡沫材料的本构关系,是遵循 Coleman 等人的本构关系的五大公理来建立的。通过对本构关系的一系列约束的考察,包括组份真实密度不变、忽略动量矩的耦和项、熵不等式等,得到了泡沫材料骨架的应力、饱和气体的应力(通常为孔隙气体压力)、固-气相间作用力、熵及热流矢量的本构关系,其中温度的变化反映在能量平衡方程中,体积分数的变化可借助于与变形梯度或应变的关系式中得出。这里得出的本构关系,可根据实际问题的需要发展 Helmholtz 自由能的具体形式,决定具体的本构关系,因为连续介质力学大量地涉及这个问题,本文不对此赘述。

参 考 文 献

- 1 Terzaghi K. Erdbaumechanik auf bodenphysikalischer Grundlage. Franz Deuticke, Leipzig, Wien, 1982. 15~21
- 2 de Boer R. Theorie poröser Medien - Historische Entwicklung und gegenwertiger Stand. FB 10/Mechanik, Universität Essen, 1991. 5~8
- 3 Biot M A. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. J. Appl. Phys. 1955, 26: 182~185

- 4 Biot M A. General theory of three-dimensional consolidation. *J. Appl. Phys.* 1941,12:155~164
- 5 Frenkel J. On the theory of seismic and seismoelectric phenomena in a moist soil. *J. Phys. (USSR)*, 1944,8: 230~241
- 6 Heinrich, Desoyer, Theorie dreidimensionaler Setzungenvorgänge in Tonschichte. *Ing.-Archiv* 1961,30:225~253
- 7 Truesdell C, Toupin R A. The classical field theories. In S. Flügge(ed.), *Handbuch der Physik, Band III/1*, Springer-Verlag, Berlin 1960. 1~20
- 8 Kelly P D. A reacting continuum. *Int. J. Engng. Sci.* 1964,2:129~153
- 9 Coleman B D, Noll W. The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1963,13:167~178
- 10 Green A E, Naghdi P M. A dynamical theory of interacting continua. *Int. J. Engng. Sci.* 1965,3:231~241
- 11 Bowen R M. Toward a thermodynamics and mechanics of mixtures. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1967,24:370~403
- 12 Müller I. A thermodynamics theory of mixtures of fluids. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1968,28:1~39
- 13 鲍文 R M. 混合物理论. 现代连续统丛书, 南京:江苏科学技术出版社, 1983. 1
- 14 Drumheller D S. The theoretical treatment of a mixing theory. *Int. J. Solids Structures* 1978,14:441~456
- 15 Bowen R M. Incompressible porous media models by use of the theory of mixtures. *Int. J. Engng. Sci.* 1980, 18:1129~1148
- 16 Bowen R M. Compressible porous media models by use of the theory of mixtures. *Int. J. Engng. Sci.* 1982, 20:697~735
- 17 de Boer R, Ehlers W. Theorie der Mehrkomponentenkontinua mit Anwendung auf bodenphysikalische Probleme. *Mech. Bericht, FB 10/Mechanik, Universität Essen*, 1986. 8~12

A Constitutive Relation of Foam Materials

Liu Zhanfang

(Dept. of Engineering Mechanics, Chongqing University, Chongqing, 400044)

Tang Lucheng

(China Academy of Engineering Physics)

ABSTRACT A constitutive model for foam materials is developed based on the Mixture Theories extended by the concept of volume fractions. Within the framework of the axiom of rational thermodynamics, the thermodynamical restrictions on the constitutive relations are investigated and the constitutive equations are formulated for the solid-gas two-phase foam materials.

KEYWORDS foam materials; porous medium; constitutive relation; rational thermodynamics